Centre Ibn Abdoune **30/01/2020**
Classes Préparatoires **MP 1**
Khouribga **ELOUADIH**

Série 14 : Intégrales dépendant d'un paramètre

Exercice 1

Étudier la fonction suivante (domaine de définition ,continuité ,dérivabilité,variations) :

$f(x) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{arctan(x\sqrt{t})}{1+t^2}$

Exercice 2

Etablir que la fonction f définie par $f(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2+itx}$ est solution d'une équation différentielle et calculer $f(x)$

Exercice 3

Soient f et g les fonctions définies par $f(x) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{sin(t)}{t+x}dt$ et $g(x) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t^2}dt$

1. Montrer que f et g sont définies et continues sur $[0, +\infty[$, de classe C^2 sur $]0, +\infty[$ et solutions d'une même équation différentielle linéaire d'ordre 2 que l'on précisera
2. En déduire que f=g et trouver la valeur de $\int\limits_0^{+\infty} \frac{sin(t)}{t}dt$

Exercice 4

Soit f la fonction définie par$f(x) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{sin(xt)}{t(1+t^4)}dt$

1. Montrer que f est de classe C^3 sur $\mathbb{R}$, de classeC^4 sur $\mathbb{R}^*$ et préciser $f(0), f'(0), f"(0)$ et $f^{(3)}(0)$
2. Montrer que f est solution d'une équation différentielle sur $\mathbb{R}^*$d'ordre 4 et en déduire $f(x)$

Exercice 5 ***Calcul de*** $\Gamma'(1)$ ***et*** $\Gamma'(n)$ ***pour*** $n \geq 1$

1. Exprimer $\Gamma'(1)$sous forme d'une intégrale
2. Etablir les égalités suivantes :
   $\int\limits_0^1 u^n \ln(1-u)du = \frac{-1}{n+1}\int\limits_0^1 \frac{u^{n+1}-1}{u-1}du = \frac{-1}{n+1}(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n+1})$
3. En déduire en fonction de n l'expression de $u_n = \int\limits_0^n (1 - \frac{t}{n})^n \ln(t)dt$
4. Déterminer de deux façons différentes la limite de $(-u_n)$ et en déduire $\Gamma'(1)$ en fonction de γ
5. Exprimer $\Gamma'(2)$ en fonction de $\Gamma'(1)$ et en déduire $\Gamma'(2)$

Exercice 6

Soit f la fonction définie par $f(x) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{cos(xt)}{1+t^2}dt$

1. Df
2. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$
3. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$

Exercice 7

Soit f la fonction définie par $f(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} exp(tx - t^2)dt$

1. Df
2. Montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$
3. Former une équation différentielle (E)dont f est solution
4. dtm les conditions initiales f(0)et f'(0)
5. chercher les solutions de (E)DSE

Exercice 8

Soit f la fonction définie par $f(x) = \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{exp(\frac{-x^2}{t^2})}{1+t^2}dt$

1. Df et parité
2. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R} f(x) = \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{e^{-x^2t^2}}{1+t^2}dt$
3. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$
4. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$
5. Former une équation différentielle (E)dont f est solution sur $\mathbb{R}_*^+$
6. Résoudre (E)

Exercice 9

Soit f la fonction définie par $f(x) = \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\ln(x^2+t^2)}{1+t^2}dt$

1. Df et parité
2. Montrer que f est continue sur $]0, +\infty[$
3. Montrer que f est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$
4. déterminer $f(x)$ en intégrant $f'(x)$ pour $x > 0$
5. calculer $f(0)$(poser $t = \frac{1}{u}$)

Exercice 10 ***CCP :Continuité d'une fonction définie par intégrale***

1. *Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et g une application de $I \times J$ dans $\mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in I$, la fonction $t \mapsto g(x,t)$ soit intégrable sur J.*
   On pose, pour tout $x \in I$, $f(x) = \displaystyle\int_J g(x,t)\ dt$.
   Donner toutes les hypothèses du théorème de continuité d'une fonction définie par intégrale dépendant d'un paramètre permettant de conclure que la fonction f est continue sur I.
2. *On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_1(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt)}{1+t^2}\ dt$.*
   Démontrer que la fonction f_1 est continue sur $\mathbb{R}$.
3. *On pose pour tout $x \in [0, +\infty[$, $f_1(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} x e^{-xt}\ dt$.*
   Calculer $f_2(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   La fonction f_2 est-elle continue sur $[0, +\infty[$?
   Que peut-on en conclure concernant l'hypothèse de domination ?

Choisissez un travail que vous aimez, et vous n'aurez jamais à travailler un seul jour dans votre vie