Centre Ibn Abdoune
Classes Préparatoires
Khouribga

30/01/2020
MP 1
ELOUADIH

Série 13 : Intégration

Exercice 1

Soit f une fonction continue de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ telle que pour toute fonction en escalier ϕ de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ on ait $\int\limits_a^b f\phi = 0$.Montrer que $f = 0$

Exercice 2

Soit f une fonction continue de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ .On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ telle que $\forall k \in \{0,...,n\} \int\limits_a^b x^k f(x)dx = 0$.Montrer que f admet au moins $n+1$ zéros dans $[a,b]$

Exercice 3

Calculer les limites des sommes suivantes : $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\sqrt[n]{2^k}}{n}; v_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{n+k}{n^2+k^2}; w_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^2\sqrt[3]{n^3+k^3}}$; $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} sin(\frac{1}{n+k}); t_n = \sqrt[n]{\prod\limits_{k=1}^{n} 1 + \frac{k^2}{n^2}}$

Exercice 4

1. Montrer que la fonction définie par $\phi(x) = \int\limits_0^x e^{t^2}dt$ est un C^∞ diffeomorphisme de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$
2. (a) Montrer que la relation $\int\limits_x^{f(x)} e^{t^2}dt = 1$ définit une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.
   (b) Montrer que la droite d'équation $y = -x$ est un axe de symétrie de la courbe representative de f .
   (c) Montrer $(\forall x \in \mathbb{R}) : x \leq f(x) \leq x + e^{-x^2}$;en déduire les branches infinies de la courbe

Exercice 5 ***Lemme de Riemann Lebesgue***

1. Montrer que si $f \in C^1([a,b],\mathbb{C})$ et si $I(\lambda) = \int\limits_a^b f(t)e^{i\lambda t}dt$ où $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $\lim\limits_{|\lambda|\to+\infty} I(\lambda) = 0$
2. En déduire que ce résultat est encore vrai si $f \in C([a,b],\mathbb{C})$ (On utilisera un théorème d'approximation)
3. Généraliser pour les fonctions en escalier et après les fonctions continues par morceaux

Exercice 6

Justifier l'existence et calculer les intégrales suivantes :$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(sin(t))dt$ et $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(cos(t))dt$

Exercice 7
Etudier l'existence des intégrales suivantes puis les calculer s'il est possible :
$\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dt}{t^2\sqrt{t^2-1}}$; $\int\limits_{-1}^{1} t\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}dt$; $\int\limits_{0}^{1} \frac{\ln(t)dt}{\sqrt{t}(1-t)^{\frac{3}{2}}}$; $\int\limits_{0}^{+\infty} \ln(1+\frac{1}{t^2})dt$

Exercice 8
Montrer que $f(t)=\frac{t}{e^t-1}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$et que $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{t}{e^t-1}dt = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$

Exercice 9
Montrer que $f(t)=\frac{\ln(t)}{t^2-1}$ est intégrable sur $]0,1[$et que $\int\limits_{0}^{1} \frac{\ln(t)}{t^2-1}dt = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$

Exercice 10
Montrer que $f(t)=\frac{\ln(t)\ln(1-t)}{t}$ est intégrable sur $]0,1[$et que $\int\limits_{0}^{1} \frac{\ln(t)\ln(1-t)}{t}dt = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$

Exercice 11

1. La fonction $x \to \frac{e^{-x}}{\sqrt{x^2-4}}$ est-elle intégrable sur $]2;+\infty[$?
2. Soit a un réel strictement positif. La fonction $x \to \frac{lnx}{\sqrt{1+x^{2a}}}$ est-elle intégrable sur $]0;+\infty[$?

Exercice 12 ***CCP2010 : Partie préliminaire***

1. (a) *Justifier que la fonction $t \to \frac{sint}{t}$est intégrable sur l'intervalle $]0;\pi]$.*
   On pose $I=\int\limits_{0}^{\pi} \frac{sint}{t}dt$

   (b) *Rappeler le développement en série entière en 0 de la fonction sinus et déterminer, avec soin, une suite $(u_k)_{k\geq 0}$ vérifiant $I=\sum\limits_{k=0}^{+\infty}(-1)^k u_k$*

2. (a) *Démontrer que la suite $(\frac{\pi^n}{n!})$converge et que la suite $(\frac{\pi^n}{n.n!})$est décroissante.*

   (b) *Si $R_n = \sum\limits_{n+1}^{+\infty}(-1)^k u_k$, majorer $|R_n|$, en utilisant la question (a).*

   (c) *En déduire, en précisant la valeur de n utilisée, une valeur approchée du réel $\frac{2}{\pi}I$ à 10^{-2}près.*

Oral CCP :Globalement, les candidats connaissent mieux les hypothèses des théorèmes de continuité et de dérivabilité que sur les sessions précédentes mais ils ne pensent pas, quand c'est nécessaire, à se placer localement pour l'hypothèse de domination. Et certains continuent, pour l'hypothèse de domination, à majorer, trop souvent, par une fonction qui dépend encore des deux variables de la fonction initiale. Pourtant, si on leur demande alors l'énoncé du théorème, ils évoquent bien une domination par une fonction qui ne dépend plus que de la variable d'intégration.

Les rêves donnent du travail