Centre Ibn Abdoune | **21/01/2020**
Classes Préparatoires | **MP 1**
Khouribga | **ELOUADIH**

Série 11 : Séries de fonctions

Exercice 1
Etudier les différents modes de convergence des séries de fonctions suivantes :

1. $f_n(x) = xe^{-n^2x^2}, I = \mathbb{R}^+, n \geq 0$
2. $f_n(x) = (-1)^n \frac{n}{n^2+x}, I = \mathbb{R}^+, n \geq 1$
3. $f_n(x) = \frac{x}{n(1+nx^2)}, I = \mathbb{R}^+, n \geq 1$
4. $f_n(x) = (-1)^n \frac{x}{(1+x^2)^n}, I = \mathbb{R}, n \geq 0$

Exercice 2
Soit $u_n(x) = \frac{xe^{-nx}}{lnn}, n \geq 2$ et u la somme de la série $\sum u_n$

1. Déterminer le domaine de u
2. y'a-t-il convergence normale ,uniforme de $\sum u_n$ sur $\mathbb{R}^+$
3. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x)$
4. Etudier la continuié de u sur D_u

Exercice 3

1. Montrer que $\sum\limits_{n\geq1} \frac{1}{n^2+x^2}$ converge normalement sur $\mathbb{R}^+$
2. Montrer que
$$(\forall x > 0)\frac{\pi}{2x} - \frac{1}{x}arctan(\frac{1}{x}) \leq f(x) \leq \frac{\pi}{2x} - \frac{1}{x}arctan(\frac{1}{x}) + \frac{1}{1+x^2}$$
3. Montrer que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+x^2} \sim \frac{\pi}{2x}$ au voisinage de $+\infty$

Exercice 4
Soit $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{sh(nx)}$

1. Déterminer D_f le domaine de f
2. Montrer que
$$(\forall x > 0)\frac{1}{x}ln(\frac{e^x+1}{e^x-1}) \leq f(x) \leq \frac{1}{x}ln(\frac{e^x+1}{e^x-1}) + \frac{1}{sh(x)}$$
3. Montrer que $f(x) \sim 2e^{-x}$ au voisinage de $+\infty$
4. Montrer que $f(x) \sim \frac{-lnx}{x}$ au voisinage de 0^+

Exercice 5
Etudier la convergence ,la continuité ,la dérivabilité ,le sens de variation des fonctions et limites aux bornes de domaine de définition : $S_1(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} Arctan(\frac{x}{n^2}); S_2(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} e^{-n^2 x}$;
$S_3(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} ln(1 + \frac{x}{n^2})$

Exercice 6
Sachant que $ln(1+x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$ sur $[0,1]$,montrer que

$$\int_0^1 ln(1+x^2)dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(2n+1)}$$

Exercice 7
On considére les fonctions définies sur $]0, +\infty[$ par :

$$U(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(x+n)}$$

et

$$u(x) = \int_0^1 e^{-t} t^{x-1} dt$$

1. Montrer que U et u sont bien définies sur $]0, +\infty[$
2. Etudier la continuité et la dérivabilité de la fonction U et former une relation entre $U(x)$ et $U(x+1)$
3. En déduire un équivalent de U en 0, puis un équivalent de U en $+\infty$
4. Comparer les fonctions U et u

Exercice 8
Soit $u_n(x) = e^{-x\sqrt{n}}, n \geq 1$ et u la somme de la série $\sum u_n$
1. Déterminer le domaine de u
2. Montrer que u est continue sur $\mathbb{R}_*^+$
3. Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x) = 0$
4. Montrer que u est decroissante sur $\mathbb{R}_*^+$
5. Montrer que $u(x) \sim e^{-x}$ au voisinage de $+\infty$
6. Montrer que $u(x) \sim \frac{2}{x^2}$ au voisinage de 0^+

Ce n'est pas parce que les choses sont difficiles que nous n'osons pas, c'est parce que nous n'osons pas qu'elles sont difficiles