Centre Ibn Abdoune **08/01/2020**
Classes Préparatoires **MP 1**
Khouribga **ELOUADIH**

Série 10 : Suites de fonctions

Exercice 1

Étudier la convergence simple et uniforme des suites de fonctions suivantes :

1. $f_n(x) = \frac{x}{x^2+n}, I = \mathbb{R}, n \geq 1$
2. $f_n(x) = \frac{nx}{x^2+n}, I = \mathbb{R}, n \geq 1$
3. $f_n(x) = xe^{\frac{x}{n}}, I = \mathbb{R}^+, n \geq 1$
4. $f_n(x) = n(x^n - x^{n+1}), I = [0, 1], n \geq 0$
5. $f_n(x) = nx^n lnx$ si $x \neq 0$ et $f_n(0) = 0, I = [0, 1], n \geq 0$
6. $f_n(x) = 4^n(x^{2^n} - x^{2^{n+1}}), I = [0, 1], n \geq 0$
7. $f_n(x) = \frac{1}{1+x+x^2+...+x^n}, I = [0, 1], n \geq 0$
8. $f_n(x) = arctan(\frac{n+x}{1+nx}), I = \mathbb{R}^+, n \geq 0$

Exercice 2

Soient $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ une application continue non nulle telle que : $f(0) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, (f_n)et(g_n) deux suites d'applications définies sur $\mathbb{R}^+$ par $f_n(x) = f(nx)$ et $g_n(x) = f(\frac{x}{n})$ où $n \geq 1$

1. Étudier la convergence simple de (f_n)et(g_n)
2. Montrer qu'il n'y a pas de convergence uniforme
3. Montrer que $(f_n g_n)$converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$

Exercice 3

Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sqrt{x}$.
(P_n) la suite de fonctions polynomiales définies sur $[0, 1]$ par :
$P_0 = 0$et $(\forall n \in \mathbb{N})(\forall x \in [0, 1])2P_{n+1}(x) = x + 2P_n(x) - P_n^2(x)$

1. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})(\forall x \in [0, 1])P_{n+1}(x) - \sqrt{x} = (P_n(x) - \sqrt{x})(1 - \frac{P_n(x)+\sqrt{x}}{2})$
2. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})(\forall x \in [0, 1])0 \leq P_n(x) \leq P_{n+1}(x) \leq \sqrt{x} \leq 1$
3. Montrer que (P_n) converge simplement vers f sur $[0, 1]$
4. Montrer que$(\forall n \in \mathbb{N})(\forall x \in [0, 1])0 \leq \sqrt{x} - P_n(x) \leq \frac{2\sqrt{x}}{2+n\sqrt{x}}$
5. En déduire la convergence uniforme de (P_n) sur $[0, 1]$
6. On pose $Q_n(X) = P_n(X^2)$ Étudier la convergence de la suite (Q_n) sur $[-1, 1]$

Exercice 4

Soit E un e.v.n $X \subset E$ et $Y \subset \mathbb{R}. f_n : X \to Y$ et $g : Y \to \mathbb{R}$ des applications et $n \in \mathbb{N}$

1. Montrer que si (f_n) converge uniformément vers f sur X et que g est uniformément continue alors (gof_n) converge uniformément vers go f sur X
2. En déduire que si $(f_n : X \to \mathbb{R})$converge uniformément vers f sur X alors $(\frac{f_n}{1+f_n^2})$converge uniformément vers $(\frac{f}{1+f^2})$ sur X

Exercice 5
Soit (P_n) une suite de fonctions polynomiales à coefficients réels qui converge uniformément sur $\mathbb{R}$.Montrer que sa limite est une fonction polynomiale.

Exercice 6 ***Weierstrass et Bernstein***
Le but de cet exercice est de montrer que toute fonction $f \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{C})$est limite uniforme de la suite de fonctions polynômes $P_n = B_n(f)$où $P_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k f(\frac{k}{n}) x^k (1-x)^{n-k}$

1. Déterminer $B_n(f_i)$ si $f_i(x) = x^i, i = 0;1;2$
   (Faire intervenir la fonction $\varphi(t) = (1-x+xe^t)^n$ et le binôme de Newton
2. Pour $\alpha > 0$,on considère les deux ensembles disjoints définis par :
   $A = \{k \in \{0,...,n\}/|k-nx| > n\alpha\}$ et $B = \{k \in \{0,...,n\}/|k-nx| \leq n\alpha\}$
   avec $A \cup B = \{0,...,n\}$
   On pose $S' = \sum\limits_{k\in A} C_n^k [f(x) - f(\frac{k}{n})] x^k (1-x)^{n-k}$
   et $S" = \sum\limits_{k\in B} C_n^k [f(x) - f(\frac{k}{n})] x^k (1-x)^{n-k}$
   (a) Montrer que $\exists M \in R^+$ tel que $M = \sup\limits_{x\in[0,1]} |f(x)|$
   et que
   $$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \alpha > 0)\forall (x_1,x_2) \in [0,1]^2 |x_1 - x_2| < \alpha \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$
   (b) Montrer que
   $$|S'| \leq \frac{2M}{n^2\alpha^2} \sum_{k\in A} C_n^k (k-nx)^2 x^k (1-x)^{n-k}$$
   En déduire que
   $$|S'| \leq \frac{2M}{\alpha^2}\frac{x(1-x)}{n} \leq \frac{M}{2n\alpha^2}$$
   (c) Montrer que
   $$|S"| \leq \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k\in A} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \leq \frac{\varepsilon}{2}$$
   (d) Conclure et généraliser à $[a,b]$

Exercice 7
Soit (f_n) la suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :
$f_n(x) = (1 - \frac{x^2}{n})^n$ si $|x| \leq \sqrt{n}, f_n(x) = 0$ sinon

1. déterminer la limite simple de (f_n)
2. Étudier le signe de $f - f_n$
3. Établir ,pour $0 \leq x \leq \sqrt{n}$,que $(f-f_n)'(x)$est du signe de
   $\varphi_n(x) = x^2 + (n-1)ln(1 - \frac{x^2}{n})$
   Étudier$\varphi_n$et montrer que φ_n s'annule en un point α_n compris entre 1 et$\sqrt{n}$
4. Montrer,pour $0 \leq x \leq \sqrt{n}$, que $f - f_n$ est majorée par $\frac{\alpha_n^2}{n} e^{-\alpha_n^2} \leq \frac{1}{en}$
5. En déduire la convergence uniforme de (f_n)
6. (a) Montrer que $\forall x \in [0,\sqrt{n}] (1 - \frac{x^2}{n})^n \leq e^{-x^2} \leq (1 + \frac{x^2}{n})^{-n}$
   (b) Calculer l'intégrale $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} exp(-x^2)dx$
   (on utilisera les intégrales de Wallis $I_n = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} cos^n(t)dt$ et on rappelle que $I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$)

Exercice 8

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $(\forall n \in \mathbb{N}) \int\limits_a^b t^n f(t)dt = 0.$

Montrer que f est nulle sur [a,b]

Exercice 9
Théorème de Dini
Soit (f_n) une suite de fonctions continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ telle $f_n \xrightarrow{C.S} 0$ sur $[a,b]$ et pour tout$x \in [a,b]$ la suite $(f_n(x))$ est décroissante

1. montrer que $\|f_n\|_\infty$ est convergente
2. montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe $x_n \in [a,b]$ tel que $\|f_n\|_\infty = f_n(x_n)$
3. en observant que pour tout $p \leq n : f_n(x_n) \leq f_p(x_n)$,
montrer que $\|f_n\|_\infty \to 0$ et conclure

Exercice 10
Soit (u_n) la suite de fonctions définies de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ par
$u_0(x) = 1$ et $(\forall n \in \mathbb{N}) u_{n+1}(x) = 1 + \int\limits_0^x u_n(t-t^2)dt$

1. Montrer que $\forall x \in [0,1] 0 \leq u_{n+1}(x) - u_n(x) \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$
2. En déduire que $\forall n, p \in \mathbb{N} \|u_{n+p} - u_n\|_\infty \leq \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!}$
3. Montrer que pour tout $x \in [0,1] (u_n(x))$ est Cauchy
4. Montrer que (u_n) converge uniformément vers une fonction non nulle u sur $[0,1]$ vérifiant $\forall x \in [0,1] u'(x) = u(x-x^2)$

Exercice 11
Étudier la suite de fonctions

$$(n \geq 0) : f_n(x) = e^{-nx} sin(nx)$$

sur $\mathbb{R}^+$ puis sur $[a, +\infty[$ avec $a > 0$

Cherchons donc ce qu'il y a de mieux à faire, non ce qui est le plus en usage.
Sénèque, La vie heureuse (De vita beata)