Centre Ibn Abdoune **10/12/2019**
Classes Préparatoires **MP 1**
Khouribga **ELOUADIH**

Série9 : Séries dans un evn de dim finie

Exercice 1
Montrer que les séries suivantes sont convergentes et caculer leurs sommes :
$\sum\limits_{n\geq 0} arctan(\frac{1}{n^2+n+1})$; $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$; $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{n^2}{n!}$; $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{n^3}{n!}$;
$\sum\limits_{n\geq 2} ln(1-\frac{1}{n^2})$; $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n^2(n+1)^2}$; $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{cos(nt)}{n!}$
$\sum\limits_{n\geq 1} arctan(\frac{1}{2n^2})$ ind :calculer $tan(S_1), tan(S_2)$, etc....
$\sum\limits_{n\geq 0} ln(cos(\frac{x}{2^n}))$ ind :exprimer $S_n + ln(sin(\frac{x}{2^n}))$en fonction de $S_{n-1} + ln(sin(\frac{x}{2^{n-1}}))$
$\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{1^2+2^2+...+n^2}$
$\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (n+1)3^{-n}$

Exercice 2
Determiner l'exponentielle des matrices suivantes :
$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} cos(\theta) & -sin(\theta) \\ sin(\theta) & cos(\theta) \end{pmatrix}$; $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; $A+B$

Exercice 3
Etudier la nature des séries suivantes :
$\sum\limits_{n\geq 1} (e-(1+\frac{1}{n})^n)$; $\sum\limits_{n\geq 0} sin(\pi\sqrt{n^2+1})$; $\sum\limits_{n\geq 1} (-1)^n\sqrt{n}sin(\frac{1}{n})$; $\sum\limits_{n\geq 0} sin(\pi(\sqrt{5}+2)^n)$;
$\sum\limits_{n\geq 0} arccos(\frac{n^a}{n^a+1})$ avec $a>0$; $\sum\limits_{n\geq 0} \sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n}$; $\sum\limits_{n\geq 0} 2ln(n^3+1) - 3ln(n^2+1)$; $\sum\limits_{n\geq 2} \frac{1}{(ln(n))^{ln(n)}}$

Exercice 4
Soit$H_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$
Montrer que $H_n = ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o(\frac{1}{n^2})$

Exercice 5 ***Transformation d'Abel***
Soit (ε_n)une suite de réels positifs ,décroissante et convergeant vers 0.
Soit (a_n)une suite de complexes telle que :

$$(\exists M > 0)(\forall n \in \mathbb{N})|\sum_{p=0}^{n} a_p| \leq M$$

Montrer que la série $\sum \varepsilon_n a_n$ est convergente
Application :Montrer que $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{e^{in\theta}}{n}$ est convergente

Exercice 6 ***Formule de Stirling***

1. **Intégrales de Wallis** $I_n = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} sin^n(t)dt$
   (a) Montrer que $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$
   (b) Déterminer I_{2n} et I_{2n+1} en fonction de n
   (c) Montrer que $I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$
2. (a) Montrer que $ln(n) \leq \int\limits_n^{n+1} ln(t)dt \leq ln(n+1)$
   (b) En déduire que $ln(n) \sim \int\limits_n^{n+1} ln(t)dt$
   (c) Montrer que $ln(n!) \sim \int\limits_1^{n+1} ln(t)dt$
   puis que $ln(n!) \sim nln(n)$
3. $u_n = ln(n!) - nln(n)$
   (a) Montrer que $u_n - u_{n-1} \sim -1$
   (b) En déduire $ln(n!) = nln(n) - n + o(n)$
4. $v_n = ln(n!) - nln(n) + n$
   (a) Montrer que $v_n - v_{n-1} \sim \frac{1}{2n}$
   (b) En déduire que $ln(n!) = nln(n) - n + \frac{1}{2}ln(n) + o(ln(n))$
5. $w_n = ln(n!) - nln(n) + n - \frac{1}{2}ln(n)$
   (a) Montrer que $w_n - w_{n-1} \sim -\frac{1}{12n^2}$
   (b) En déduire que $\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} w_k - w_{k-1} \sim -\frac{1}{12n}$
   (c) En déduire que $ln(n!) = nln(n) - n + \frac{1}{2}ln(n) + +lim w_n + \frac{1}{12n} + o(\frac{1}{n})$
   (d) Montrer que $n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{n} e^l$ où $l = lim(w_n)$
   (e) Montrer que $I_{2n} \sim \frac{\pi}{e^l \sqrt{2\pi n}}$
   (f) En déduire $n! \sim (\frac{n}{e})^n \sqrt{2\pi n}$

Exercice 7 ***Compléments à la régle de D'Alembert***
Soit $\sum u_n$ une série à termes strictement positifs telle que $lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$

1. (a) Donner ,si $0 < l < 1$, un équivalent du reste partiel R_n
   (b) Prouver ,si $l = 0$, que $R_n \sim u_{n+1}$
2. Donner ,si $l > 1$, un équivalent de la somme partielle S_n
3. On suppose que $l = 1$ et que $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 + \frac{a}{n} + \frac{b}{n^2} + o(\frac{1}{n^2})$
   (a) Donner un developpement de $ln(\frac{u_{n+1}}{u_n})$ à la précision $o(\frac{1}{n^2})$ puis un équivalent de u_n
   (b) En déduire dans ce cas la nature de la série $\sum u_n$ en fonction de a
   (c) Application :
   Etudier la nature de la série $\sum u_n$ en fonction des réels positifs a,b,c,d lorsque

$$u_n = \frac{(a+1)(a+2)....(a+n)(b+1)(b+2).....(b+n)}{(c+1)(c+2)....(c+n)(d+1)(d+2)....(d+n)}$$

Exercice 8

1. Soit $\alpha > 1$. Donner un équivalent de $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$
2. Pour quelles valeurs de α, la série $\sum\limits_{n\geq 0} \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ converge ?
3. Montrer qu'alors $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} = \sum\limits_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^{\alpha-1}}$

Exercice 9
Montrer que $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \exp(A)$ est un polynome en A

Exercice 10 ***Sommation des équivalents***
Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = arctan(u_n)$

1. Montrer que la suite (u_n) converge vers 0
2. Montrer que la suite $v_n = \frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2}$ converge vers $l > 0$
3. En déduire que $u_n \sim \sqrt{\frac{3}{2n}}$

Exercice 11 ***Sommation des équivalents***
Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = sin(u_n)$

1. Montrer que la suite (u_n) converge vers 0
2. Montrer que la suite $v_n = \frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2}$ converge vers $l > 0$
3. En déduire que $u_n \sim \sqrt{\frac{3}{n}}$

Exercice 12
Étudier la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$de terme général $u_n = \int\limits_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-\sqrt{t}} \sin(t)dt$

Exercice 13
Montrer que $\sum\limits_{2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)} \sim \ln(\ln(n))$

Exercice 14
Montrer que $\ln(n!) \sim n\ln(n)$

Exercice 15
A quelle condition $(u_{p,q} = \frac{1}{p^\alpha q^\beta})_{p,q\geq 1}$ est sommable ?

Exercice 16
Montrer que $(u_{p,q} = \frac{1}{pq(p+q)})_{p,q\geq 1}$ est sommable

Exercice 17
Calculer $\sum\limits_{p=2}^{+\infty} \sum\limits_{q=2}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{q^p}$

Exercice 18
Étudier la sommabilité et déterminer la somme de la suite double$(\frac{p!q!}{(p+q+2)!})_{p,q\geq 0}$

Exercice 19
Montrer que pour tout réel $x \in]-1,1[\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{1-x^{2n+1}} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1-x^{2n}}$

Exercice 20
Étudier la sommabilité et déterminer la somme de la suite double$(\frac{p+q}{p!q!2^{p+q}})_{p,q\geq 0}$

Exercice 21
Démontrer que la famille $(\frac{i+j}{2^{i+j}})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable et calculer sa somme.

Exercice 22 ***ccp2017***
On admet que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$ et on pose $A=N^*\times N^*$

1. Démontrer que la famille$(\frac{1}{p^2q^2})_{(p,q)\in A}$est sommable et calculer sa somme.
2. Démontrer que la famille$(\frac{1}{p^2+q^2})_{(p,q)\in A}$ n'est pas sommable.

Exercice 23
Montrer que le produit de Cauchy de $u_n=v_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ n'est convergent