Centre Ibn Abdoune | **22/10/2019**
Classes Préparatoires | **MP 1**
Khouribga | **ELOUADIH**

Série5: CALCUL DIFFERENTIEL

Exercice 1
Etudier la continuité de l'application f définie par $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^4+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Exercice 2
Soit $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$
2. f est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 3
Soit $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

1. Montrer que f est-elle continue sur $\mathbb{R}^2$?
2. f est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$?
3. calculer $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$

Exercice 4
Soit $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3y}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

1. Etudier la continuité de f et de ses dérivées partielles sur $\mathbb{R}^2$
2. f est-elle de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 5
Soit $f : U = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ de classe C^1
Exprimer le gradient de f en coordonnées polaires

Exercice 6
Etudier la différentiabilité et calculer la différentielle des applications matricielles suivantes :$A \to tr(A); A \to^t A; A \to det(A); A \to^t AA; A \to A^2;$

Exercice 7
Extremms des fonctions définies par :

1. $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$
2. $f(x,y) = x^2y + ln(1+y^2)$
3. $f(x,y) = xln(x^2) + y^2$
4. $f(x,y) = xe^y + ye^x$

Exercice 8

Montrer que l'application f définie par $\varphi(P) = \int\limits_0^1 P^2(t)dt$ est differentiable sur $\mathbb{R}_n[X]$ et calculer sa différentielle

Exercice 9

Résoudre sur des ouverts convenables les équations suivantes :

1. $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{x}$
   f est une fonction de classe C^1 sur l'ouvert $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2/x > 0\}$
2. $x^2 + y^2 + (x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y})f = 0$
   f est une fonction de classe C^1 sur l'ouvert $U = \mathbb{R}^2 - \{(x, 0)/x \leq 0\}$
3. $x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ (poser $x = u$ et $y = uv$)
   f est une fonction de classe C^2 sur l'ouvert $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2/x > 0\}$
4. $2x\frac{\partial f}{\partial x} - y(1 + y^2)\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ (poser $x = \frac{u^2+v^2}{2}$ et $y = \frac{u}{v}$ avec $u > 0$ et $v > 0$
   f est une fonction de classe C^1 sur l'ouvert $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2/x > 0; y > 0\}$
5. $\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} + 3(x - y)f = 0$ (poser $u = xy$ et $v = x + y$
   f est une fonction de classe C^1 sur l'ouvert $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2/x > y\}$

Exercice 10

On associe à toute fonction f de classe C^2 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$,la fonction $F(x, y) = f(\frac{y}{x})$.
Déterminer les fonctions f pour lesquelles $\triangle F = 0$ sur $U =]0, +\infty[\times\mathbb{R}$

Exercice 11

Soit les fonctions f et g définies par $f(x, y, z) = (e^{xy}, xe^z, x + y + z)$ et
$g(u, v, w) = (u^2 + v, vw)$ determiner la matrice jacobienne de gof et en déduire $d(gof)$

Exercice 12

Soit les fonctions f et g définies par $f(x, y) = (x^2 + y, x - y^2)$ et $g(u, v) = sin(u^2 + v^2)$ determiner la matrice jacobienne de gof

Exercice 13

Résoudre $\frac{\partial f}{\partial x} + a\frac{\partial f}{\partial y} = f$ poser $u = x$ et $v = y - ax$

Exercice 14

Déterminer l'équation du plan tangent à la surface de niveau d'équation :
$sin(\pi xy) + sin(\pi yz) = 1$ au point $(1, \frac{1}{6}, 1)$

Exercice 15

Trouver l'équation du plan tangent à la surface d'équation $z = \sqrt{19 - x^2 - y^2}$ au point (1,3,3)

Exercice 16

Trouver tous les points de la paraboloide d'équation $z = 4x^2 + y^2$ où le plan tangent est parallèle au plan $x + 2y + z = 6$

Exercice 17

Dans le plan euclidien rapporté à un repère orthonormé ,on considère la courbe paramètre Cd'équation $\begin{cases} x(t) = 3t^2, \\ y(t) = 2t^3, \end{cases}$
Déterminer les droites qui sont à la fois tangentes et normales à (C)

Exercice 18
Soit $\sum$ la surface d'équation $z^3 = xy$.Déterminer les plans tangents à $\sum$ qui contiennent la droite $\begin{cases} x = 2, \\ y = 3z - 3, \end{cases}$

Exercice 19 ***CNC2014***
On considère la fonction de deux variables $F : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$définie par :
$\begin{cases} F(x,y) = \frac{xy(1-x)(1-y)}{1-xy} & (x,y) \neq (1,1) \\ F(1,1) = 0 \end{cases}$

1. Montrer que $\forall (x,y) \in [0,1]^2 (1-x)(1-y) \leq (1-\sqrt{xy})^2$
2. Montrer F est continue sur $[0,1]^2$
3. En déduire que F est bornée sur $[0,1]^2$et atteint ses bornes.
4. Déterminer la borne inférieure de F sur $[0,1]^2$, en quels points de $[0,1]^2$ cette borne est-elle atteinte ?
5. Justifier que F est de classe C^1 sur l'ouvert $]0,1[^2$ et calculer ses dérivées partielles premières.
6. Montrer que F admet un unique point critique (x_o, y_o) dans l'ouvert $]0,1[^2$ et le préciser.
7. Calculer $F(x_o, y_o)$ et justifier que $F(x_o, y_o) = \sup\limits_{(x,y)\in[0,1]^2} F(x,y)$.

Exercice 20 ***CCP2010***

On considère la fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $f(x,y) = \begin{cases} f(x,y) = \frac{y^4}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

1. Démontrer que la fonction f admet des dérivées partielles premières en (0, 0) que l'on déter- minera.
2. Démontrer que la fonction f est différentiable en (0, 0).

Exercice 21 ***CCP2007***

On considère la fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $f(x,y) = \frac{x+y}{(1+x^2)(1+y^2)}$

1. On pose $F = [0,1] \times [0,1]$, justifier que la fonction f est bornée sur F et y atteint sa borne supérieure.
   On pose alors $M = \sup\limits_{(x,y)\in F} f(x,y)$
2. Montrer que si la borne supérieure est atteinte en un point de l'ouvert $]0,1[\times]0,1[$ alors nécessairement $M = \frac{3\sqrt{3}}{8}$
3. Déterminer le maximum de la fonction f sur la frontière de F et le comparer à $\frac{3\sqrt{3}}{8}$(on pourra utiliser la calculatrice). Déterminer M.

Exercice 22
On considère la fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $f(x,y) = \begin{cases} f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

1. Démontrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Démontrer que f admet des dérivées partielles en tout point de R^2.
3. f est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$? Justifier.