Centre Ibn Abdoune **05/10/19**
Classes Préparatoires **MP 1**
Khouribga **ELOUADIH**

Série4 : Espaces vectoriels normés de dimension finie

Exercice 1
Soient $n \geq 2$ et $A = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{K})$
On note A l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ qui à X associe AX

1. Montrer que la norme subordonnée à $||.||$de $\mathbb{K}^n$ est $|||.|||$dans les cas suivants
   (a) $|||A||| = \max\limits_{1\leq j\leq n}(\sum\limits_{i=1}^{n}|a_{i,j}|)$ pour $\|x\|_1 = \sum\limits_{i=1}^{n}|x_i|$avec $x = (x_1, ..., x_n)$
   (b) $|||A||| = \max\limits_{1\leq i\leq n}(\sum\limits_{j=1}^{n}|a_{i,j}|)$ pour $\|x\|_\infty = \max\limits_{1\leq i\leq n}|x_i|$ avec $x = (x_1, ..., x_n)$
2. On suppose $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Montrer que $N(A) = \sqrt{tr(^tAA)}$ est une norme non subordonnée et que $\forall (A, B) \in (M_n(\mathbb{K}))^2 N(AB) \leq N(A)N(B)$

Exercice 2
Montrer que tr est continue de $(M_n(\mathbb{C}), \|.\|)$dans $\mathbb{C}$ où $\|A\| = \max\limits_{1\leq i\leq n}(\sum\limits_{j=1}^{n}|a_{i,j}|)$

Exercice 3
Montrer que l'ensemble des matrices diagonalisables de $M_n(\mathbb{C})$est dense dans $M_n(\mathbb{C})$

Exercice 4
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que pour toute norme N sur $M_n(\mathbb{R})$, il existe $c \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\forall (A, B) \in (M_n(\mathbb{R}))^2 N(AB) \leq cN(A)N(B)$

Exercice 5
Soit (E,N) un evn de dimension finie et A une partie non vide et bornée de E . Montrer que $\exists (a, b) \in (\overline{A})^2 \delta(A) = \|a - b\|$

Exercice 6
Soit (E,N) un e.v.n de dimension finie. $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\varphi \in GL(E)$.
Montrer que $\{c \in \mathbb{R}_+ : N \circ u \leq c(N \circ \varphi)\}$ admet un minimum et le déterminer.

Exercice 7
Soit (E,N) un evn et F un sev de E de dimension finie tq $E \neq F$.

1. Montrer que $(\exists x \in E) x \notin F$
2. Montrer que $d(x, F) > 0$
3. Soit $K = F \cap B_f(x, d(x, F) + 1)$
   (a) Montrer que K est un compact
   (b) Montrer que $(\exists z_0 \in F) d(x, F) = ||x - z_0||$
   (c) Soit $y = \frac{x-z_0}{||x-z_0||}$.Montrer que $||y|| = 1$ et que $d(y, F) = 1$

Exercice 8 ***Théoréme de Riesz***
Soit (E,N) un evn .
Montrer que la boule unité $B_f(0,1)$ est un compact si et seulement si E est de dimension finie.
Supposons que $B_f(0,1)$ est compact et E de dim infinie
Soit $a_0 \in S(0,1)$

1. Montrer que $E \neq \mathbb{K}a_0$.Soit $x_0 \in E - \mathbb{K}a_0$
2. Montrer que $\delta_0 = d(x_0, \mathbb{K}a_0) > 0$
3. Montrer que $(\exists y_0 \in \mathbb{K}a_0)\delta_0 \leq\| x_0 - y_0 \|\leq 2\delta_0$
   Soit $a_1 = \frac{x_0 - y_0}{\|x_0 - y_0\|}$
4. Montrer que $d(a_1, \mathbb{K}a_0) > \frac{1}{2}$
5. supposons construits$a_0, ..., a_n$dans $S(0,1)$ tels que $d(a_k, F_k) > \frac{1}{2}$ où $F_k = vect(a_0, ..., a_n)$
   (a) Montrer que $E \neq F_{n+1}$.Soit $x_n \in E - F_{n+1}$
   (b) Montrer que $\delta_n = d(x_n, F_{n+1}) > 0$
   (c) Montrer que $(\exists y_n \in F_{n+1})\delta_n \leq\| x_n - y_n \|\leq 2\delta_n$
   Soit $a_{n+1} = \frac{x_n - y_n}{\|x_n - y_n\|}$
   (d) Montrer que $d(a_{n+1}, F_{n+1}) \geq \frac{1}{2}$
   (e) conclure

Exercice 9
Montrer que $O(n)$ est compact dans $M_n(\mathbb{R})$

Exercice 10
Soit (E,N) un evn de dimension finie et (u_n) une suite d'elements de E convergente vers l.Montrer que l'ensemble $\{u_n/n \in \mathbb{N}\} \cup \{l\}$ est un compact de E.