Centre Ibn Abdoune **05/10/19**
Classes Préparatoires **MP 1**
Khouribga **ELOUADIH**

Série3 : Espaces Vectoriels Normés(Topologie)

Exercice 1
Soient(E,N)un $\mathbb{K}$e.v.n,$\lambda \in \mathbb{K}^*$ .Montrer que :

1. Si A est fermé (resp.ouvert,compact),il en de même pour λA
2. Si A et B sont des ouverts(compacts),il en de même pour A+B
3. Si A est compact et B est fermé,alors A+B est fermé
   Examiner le cas $E = \mathbb{R}, A = a\mathbb{Z}$ et $B = b\mathbb{Z}$
4. Si A est un sev fermé et B un sev de dim finie de E alors $A + B$ est fermé

Exercice 2
Soit E un evn

1. Montrer que pour toute partie fermée F de E, Fr(Fr(F))=Fr(F)
2. En déduire que ,pour toute partie A de E ,Fr(Fr(Fr(A)))=Fr(Fr(A))

Exercice 3
Soit E un evn

1. Montrer que pour toute partie A de E ,$Vect(A) \subset vect(\overline{A}) \subset \overline{Vect(A)}$
2. En déduire que si F est sev de E alors $\overline{F}$ est sev de E
3. Montrer que si F est sev de E tel que $\overset{0}{F}\neq \emptyset$ alors F=E

Exercice 4
Soit E un evn

1. Montrer que pour tous ouverts U,V de E, $\overline{U} = \overline{V} = E \Longrightarrow \overline{U \cap V} = E$
2. En déduire que pout tous fermés F et G de E, $\overset{0}{F}=\overset{0}{G}= \emptyset \Longrightarrow \overset{0}{F \cup G}= \emptyset$

Exercice 5
Soit E un evn $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties de E.

1. $\overline{\cap_{i\in I} A_i} \subset \cap_{i\in I} \overline{A_i}$;$\overline{\cup_{i\in I} A_i} \supset \cup_{i\in I} \overline{A_i}$;$(\cap_{i\in I} A_i)^\circ \subset \cap_{i\in I} A_i^\circ$;$(\cup_{i\in I} A_i)^\circ \supset \cup_{i\in I} A_i^\circ$
2. Montrer par des exemples que ces inclusions peuvent être srictes

Exercice 6
Soit A une partie bornée d'un evn E. Montrer que $diam(\overline{A}) = diam(A)$

Exercice 7
Soit E un evn F,G deux fermés de E tels que $F \cap G = \emptyset$.
Montrer qu'il existe deux ouverts U,V de E tels que $F \subset U, G \subset V, U \cap V = \emptyset$
Utiliser l'application définie de E dans $\mathbb{R}$ par f(x)=d(x,G)-d(x,F)

Exercice 8
Soit f une application **linéaire continue** de E vers F.

1. Montrer que
   $\sup\{\frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E}/x \in E - 0_E\} = \sup\{\|f(x)\|_F/\|x\|_E \leq 1\} = \sup\{\|f(x)\|_F/\|x\|_E = 1\}$
   cette valeur commune est appelé norme subordonnée de f et on la note $|||f|||$ dite aussi norme triple
2. Montrer que $(\forall x \in E)\|f(x)\|_F \leq |||f|||.\|x\|_E$
3. Montrer que $|||f||| = \inf\{k > 0/(\forall x \in E)\|f(x)\|_F \leq k\|x\|_E\}$
4. Montrer que $f \to |||f|||$ est une norme sur $\mathcal{L}_c(E, F)$
5. Montrer que $\mathcal{L}_c(E)$ est une algèbre normée

Exercice 9
Soient E et F deux evn $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans E convergeant vers x de E
et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $\mathcal{L}_c(E, F)$ convergeant vers f de $\mathcal{L}_c(E, F)$ pour la norme $|||.|||$.
Montrer que$(f_n(x_n))_n$converge vers $f(x)$

Exercice 10
On note l^∞ l'evn des suites réelles bornées muni de la norme $\|.\|_\infty$ et
on considére l'opérateur $\triangle$de l^∞ défini par $\triangle(x) = y$ où $y = (x_{n+1} - x_n)$.
Montrer que $\triangle \in \mathcal{L}_c(l^\infty)$ et calculer $|||\triangle|||$

Exercice 11
Soit E un evn

1. Montrer que si φ est une forme linéaire continue non nulle sur E alors son noyau est un hyperplan fermé
2. Réciproquement :Soit φ est une forme linéaire non nulle sur E telle que son noyau est un hyperplan fermé
   (a) Vérifier que $(\exists a \in E)\varphi(a) = 1$.On note $H = a + Ker\varphi$.
   (b) Vérifier que $d(0, H) > 0$
   (c) Montrer que $(\forall x \in E)|\varphi(x)| \leq \frac{N(x)}{d(0,H)}$
   (d) En déduire que φ est continue
3. Soit φ est une forme linéaire continue non nulle ,$\alpha \in \mathbb{K}$et $H = \{x \in E/\varphi(x) = \alpha\}$
   (a) Montrer que$(\forall x \in H)|\varphi(y) - \alpha| \leq |||\varphi|||||y - x||$
   (b) Montrer que $(\exists x_n S(0, 1))|\varphi(x_n)| \to |||\varphi|||$
   (c) Posons $h_n = y - (\varphi(y) - \alpha)\frac{x_n}{\varphi(x_n)}$.
      i. Vérifier que$h_n \in H$
      ii. En déduire que $d(y, H) \leq \frac{|\varphi(y)-\alpha|}{|||\varphi|||}$
   (d) En déduire $d(y, H) = \frac{|\varphi(y)-\alpha|}{|||\varphi|||}$
4. Soit $E = C([0, 1], \mathbb{R})$ muni de la norme $\|.\|_\infty$ et
   $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{R}$ tel que $\varphi(f) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} f(\frac{1}{n})$
   (a) Montrer que φ est une forme linéaire continue .
   Calculer $\varphi(f_n)$ avec $f_n(x) = \begin{cases} (-1)^n, & 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ cos(\frac{\pi}{x}), & \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$
   (b) Soit $H = \{f \in E/\varphi(f) = 1\}$.Vérifier que H est un hyperplan fermé .
   Calculer $d(0, H)$.

Exercice 12
Soit $E = C([0, 1], \mathbb{R})$normé par $\|f\|_1 = \int\limits_0^1 |f(t)|dt$ et l'application $L : f \to f(1)$

1. Vérifier que L est linéaire
2. Est-elle continue sue E ? (utiliser $f_n(t) = \sqrt{n}t^n$)

Exercice 13
Soit $E = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / u_n \to 0\}$normé par la norme sup.et φ l'application définie sur E par $\varphi((u_n)) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{2^{n+1}}$

1. Montrer que φ est linéaire continue
2. calculer$|||\varphi|||$

Exercice 14
Soit $E = C([0,1], \mathbb{R})$normé par N_1et$P : E \to E$ l'application définie par $P(f) = g$ avec $g(x) = \int\limits_0^x f(t)dt$

1. Montrer que P est un endomorphisme de E
2. Montrer que P est continue et determiner $|||P|||$(utiliser $f_n(t) = (n+1)(1-t)^n$)

Exercice 15
Soit (E,N) un evn non réduit à$\{0_E\}$et $u, v \in \mathcal{L}(E)$tel que $uov - vou = id_E$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* u^n ov - vou^n = nu^{n-1}$
2. Montrer que u et v ne peuvent pas étre continues
3. E est-ilde dimension fini ?

Exercice 16
A un compact non vide d'un evn E et $f : A \to A$ une application telle que
$\forall x \neq y \|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|$

1. Montrer que f admet un point fixe unique x_0(considerer $x \to \|f(x) - x\|$)
2. Soit $a \in A$
   Montrer que x_0 est la limite de la suite definie par $\begin{cases} a_0 = a \\ a_{n+1} = f(a_n) \end{cases}$
   (considerer $u_n = \|a_n - x_0\|$)
3. Montrer que la condition de compacité est indispensable en considérant
   $f : [1, +\infty[\to [1, +\infty[$ avec $f(x) = x + \frac{1}{x}$

Exercice 17
Soit $E = C([-1,1], \mathbb{C})$normé par N_∞ et $F = C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$normé soit par N_2 telle que $N_2(f) = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt}$ soit par N_∞ avec $N_\infty(f) = \sup\limits_{t \in \mathbb{R}} |f(t)|$
$L : E \to F$l'application définie par $L(f)(t) = f(cos(t))$

1. Montrer que L est bien définie ,linéaire et injective
2. Montrer que L est continue pour chacune des normes N_2 et N_∞ de F et calculer $|||L|||_2$ et $|||L|||_\infty$

Exercice 18

1. Montrer que l'application $\phi : (A, B) \to tr(A^t B)$ definie un produit scalaire sur $M_n(\mathbb{R})$
2. Montrer que $(tr(A))^2 \leq ntr(A^t A)$
3. Montrer que l'application $tr : (M_n(\mathbb{R}), \|.\|_2) \to (\mathbb{R}, |.|)$ est continue et calculer sa subordonnée