Centre Ibn Abdoune — **24/09/19**
Classes Préparatoires — **MP 1**
Khouribga — **ELOUADIH**

Série2: ESPACES VECTORIELS NORMES:GÉNÉRALITÉS

Exercice 1
Soit $(E, \|.\|)$un evn etx, yz de E tel que $x + y + z = 0$
Montrer que $\|x - y\| + \|y - z\| + \|z - x\| \geq \frac{3}{2}(\|x\| + \|y\| + \|z\|)$

Exercice 2
Montrer que l'application N définie par $N(x, y) = \sup\limits_{t \in [0,1]} |x + ty|$ est une norme sur $\mathbb{R}^2$
Représenter graphiquement la boule unité $B_f(0_E, 1)$

Exercice 3
Montrer que l'application N définie par $N(x, y) = \sup\limits_{t \in \mathbb{R}} \frac{|tx+y|}{\sqrt{1+t^2}}$ est une norme sur $\mathbb{R}^2$.
Déterminer sa boule unité

Exercice 4
Montrer que l'application N définie par $N(x, y) = \sup\limits_{t \in \mathbb{R}} \frac{|x+ty|}{1+t+t^2}$ est une norme sur $\mathbb{R}^2$.
Déterminer sa boule unité

Exercice 5
Soit $E = C^1([0, 1], \mathbb{R})$.

1. Montrer que l'application N définie par $N(f) = \sqrt{f^2(0) + \int\limits_0^1 f'^2}$ est une norme sur E
2. Etudier l'équivalence avec les normes N_∞, N_1, N_2

Exercice 6
Soit (E, N) un e.v.n,$(a, b) \in E^2, (r, s) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$.Montrer que :

1. $B(a + b, r + s) = B(a, r) + B(b, s)$
2. $B(a, r) \cap B(b, s) \neq \emptyset \iff \|a - b\| < r + s$
3. $B(a, r) = B(b, s) \iff (a, r) = (b, s)$

Exercice 7
E un $\mathbb{K}$ e.v.N_1et N_2deux normes sur E .
$B_1 = \{x \in E/N_1(x) < 1\}$ et $B_2 = \{x \in E/N_2(x) < 1\}$
Montrer que :$B_1 = B_2 \iff N_1 = N_2$

Exercice 8
soit E le $\mathbb{R}$ e.v des applications de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^1 telles que $f(0) = 0$.
On note $N_1(f) = \sup\limits_{x \in [0,1]} |f(x)| + \sup\limits_{x \in [0,1]} |f'(x)|$ et
$N_2(f) = \sup\limits_{x \in [0,1]} |f(x) + f'(x)|$.
Montrer que N_1 et N_2 sont des normes sur E et qu'elles sont équivalentes.

Exercice 9
Soient$E = C([0,1],\mathbb{R})$et $\varphi \in E$ .On note $N_\varphi(f) = \|f\varphi\|_\infty$

1. Montrer que $N_\varphi(f)$ est une norme sur E ssi $(\varphi^{-1}(\{0\}))^\circ = \emptyset$
2. Montrer que $N_\varphi(f)$ et $N_\infty(f)$sont équivalentes ssi $\varphi^{-1}(\{0\}) = \emptyset$

Exercice 10
Soit $P = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$.On note :
$N_0(P) = \max\limits_{0 \leq k \leq n} |a_k|; N_1(P) = \sum\limits_{k=0}^{n} |a_k|; N_2(P) = \sup\limits_{t \in [0,1]} |P(t)|;$
$N_3(P) = \sup\limits_{|z|=1} |P(z)|; N_4(P) = \int\limits_0^1 |P(t)|dt.$
Montrer que ce sont des normes sur $\mathbb{C}[X]$deux à deux non équivalentes. Prendre les suites suivantes :$(P_n = X^n); (Q_n = 1 + X + ... + X^n); (R_n = X^n - X^{n+1})$

Exercice 11
Soit (E,N) un e.v.n .A une partie bornée de E.
$\mathcal{L}$ l'espace vectoriel des fonctions lipschitziennes sur A dans E.($\mathcal{L}$ est un s.e.v de B(A,E)).
On munit $\mathcal{L}$ de la nome induite N_∞de B(A,E).Soit $a \in A$

1. Pour $f \in \mathcal{L}$,on pose :
   $K_f = \{k \in \mathbb{R}_+ / (\forall (x,y) \in A^2) N(f(x) - f(y)) \leq kN(x-y)\}$,
   $c(f) = \inf K_f$ et $N_\mathcal{L}(f) = c(f) + N(f(a))$.
   Montrer que $N_\mathcal{L}$ est une norme sur $\mathcal{L}$
2. Dans le cas $E = \mathbb{R}$, $a = 0$ et $A = [0,1]$.Montrer que N_∞ et $N_\mathcal{L}$ ne sont pas équivalentes

Exercice 12 ***Normes de** Hölder **sur*** $\mathbb{K}^n$
soient $n \in N^*, p \in]1, +\infty[$ et $q = \frac{p}{p-1}$

1. Montrer que $\forall (a,b) \in \mathbb{R}_+^2 ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q$
2. Pour $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{K}^n$,on pose $\|x\|_p = (\sum\limits_{k=1}^{n} |x_k|^p))^{\frac{1}{p}}$
   (a) Montrer que $\forall (a,b) \in (\mathbb{K}^n)^2 |\sum\limits_{k=1}^{n} \overline{x_k} y_k| \leq \|x\|_p \|y\|_q$
   (b) Montrer que $\|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$
3. En déduire que $\|.\|_p$ est une norme sur $\mathbb{K}^n$
4. Montrer que $\forall x \in \mathbb{K}^n \lim\limits_{p \to +\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$

Exercice 13 ***Normes de** Hölder **sur*** $C([a,b],\mathbb{K})$
soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2, a < b, p \in]1, +\infty[$ et $q = \frac{p}{p-1}, E = C([a,b],\mathbb{K})$

1. Montrer que $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^2 \alpha\beta \leq \frac{1}{p}\alpha^p + \frac{1}{q}\beta^q$
2. Pour $f \in E$,on pose $\|f\|_p = (\int\limits_a^b |f(t)|^p dt))^{\frac{1}{p}}$
   (a) Montrer que $\forall (f,g) \in E^2 |\int\limits_a^b \overline{f}g| \leq \|f\|_p \|g\|_q$
   (b) Montrer que $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$
3. En déduire que $\|.\|_p$ est une norme sur E
4. Montrer que $\forall f \in E \lim\limits_{p \to +\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$