Centre Ibn Abdoune — **11/09/13**
Classes Préparatoires — **MP 2**
Khouribga — **ELOUADIH**

colles : **2013-2014**

Semaine 1

Sujet 1

Questions de cours :
- Convexité des boules
- définir voisinage ouvert fermé

Exercice 1

$E=\mathbb{R}[X]$ normé par $\|P\|_\infty=\max\limits_{0\leq k\leq n}|a_k|$ où $P=\sum\limits_{k=0}^{n}a_kX^k$

Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $P_n=\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{X^k}{k!}$

1. Montrer que (P_n) est de Cauchy dans $(E,\|\|_\infty)$
2. Montrer que (P_n) n'est pas convergente ?

Exercice 2

$E=\mathbb{R}^2;(x,y)\in\mathbb{R}^2$.Posons $N(x;y)=\sup\limits_{t\in\mathbb{R}}\frac{|x+ty|}{1+t^2}$

1. Montrer que N est bien définie
2. Montrer que N est une norme
3. Déterminer sa boule unité

Sujet 2

Questions de cours :
- Equivalence des normes
- caractériser un fermé

Exercice 3

$E=(u_n)\in\mathbb{R}^n/(u_n)$est bornée et$u_0=0$.On pose$N(u)=\sup\limits_{n\in\mathbb{N}}|u_{n+1}-u_n|$

1. Montrer que N est une norme
2. Montrer que $\forall u\in EN(u)\leq 2N_\infty(u)$;donner un élément qui réalise l'égalité.

Exercice 4

$E=C([0,1],\mathbb{R})$ normée par N_∞.Soit $f\in E$ posons$N(f)=\int\limits_0^1 e^t|f(t)|dt$

1. Vérifier que N est une norme
2. Soit (f_n) la suite définie par
   - $f_n(x)=1-nx, x\in[0,\frac{1}{n}]$;

- $f_n(x) = 0, x \in]\frac{1}{n}, 1]$

Calculer $N_\infty(f_n)$ et $N(f_n)$ et conclure

Sujet 3
Questions de cours :

- théorème de BW
- définir voisinage ouvert fermé

Exercice 5
Soit$E = C([0,1], \mathbb{R})$ normé par N_∞ et $p \in \mathbb{N}^*, (f_1, ..., f_p) \in E^p$
$N(x) = N_\infty(\sum\limits_{i=1}^{p} x_i f_i)$ où $x = (x_1, ..., x_p) \in \mathbb{R}^p$
Donner une CNS pour que N soit une norme sur $\mathbb{R}^p$

Exercice 6
$E = \mathbb{R}[X]$ et $P \in E, N(P) = \sum\limits_{n \in \mathbb{N}} \frac{|P^{(n)}(0)|}{n!}$

1. Montrer que N est bien définie
2. Montrer que N est une norme

Sujet 4
Questions de cours :

- Equivalence des normes
- Continuité des applications linéaires

Exercice 7
$E = C^2([0,1], \mathbb{R})$ .Soit $f \in E$ .Posons
$N(f) = \int\limits_0^1 |f(t)|dt; N'(f) = |f(0)| + \int\limits_0^1 |f'(t)|dt; N"(f) = |f(0)| + |f'(0)| + \int\limits_0^1 |f"(t)|dt$

1. vérifier que $(\forall f \in E) N'(f) = |f(0)| + N(f); N"(f) = |f(0)| + N'(f')$
2. Montrer que N' et $N"$ sont des normes
3. étudier l'équivalence de ces normes utiliser $f_n(t) = t^n$ et $g_n(t) = \frac{t^n}{n}$

Exercice 8
$E = C([0,1], \mathbb{R})$ normé par N_1 .Soit$\varphi : E \to \mathbb{R}$l'application définie par $\varphi(f) = \int\limits_0^1 tf(t)dt$

1. Montrer que φ est continue
2. Déterminer $|||\varphi|||$utiliser $f_n(t) = t^n$

Sujet 5
Questions de cours :

- continuité des applications linéaires
- norme subordonnée
- compacité

Exercice 9
$E = \mathbb{R}[X]$ et $P \in E, N(P) = \sum\limits_{n \in \mathbb{N}} \frac{|P^{(n)}(0)|}{n!}$

1. Montrer que N est une norme
2. Soit $u : E \to E$ telle que $u(P) = XP$ .Montrer que u est continue et calculer sa norme triple

Exercice 10
Montrer que $O(n)$ est compact

Sujet 6
Questions de cours :
- caractériser un fermé
- caractériser la continuité des applications linéaires

Exercice 11
$E = M_n(\mathbb{R})$normé par $N(A) = \max\limits_{1\leq i\leq n}(\sum\limits_{j=1}^{n}|a_{i,j}|)$

1. Vérifier que N est une norme
2. Montrer que la trace est continue et determiner sa nome triple

Exercice 12
Montrer que $\mathbb{Z}$ est fermé par différentes méthodes

Sujet 7
Questions de cours :
- Espace de Banach
- caractériser un fermé
- Produit de deux fermés

Exercice 13
$E = \mathbb{R}[X]$ normé par $\|P\|_\infty = \max\limits_{0\leq k\leq n}|a_k|$ où $P = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k$
Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $P_n = \sum\limits_{k=0}^{n}\frac{X^k}{k!}$

1. Montrer que (P_n) est de Cauchy dans $(E, \|\|_\infty)$
2. Montrer que (P_n) n'est pas convergente dans $(E, \|\|_\infty)$?

Exercice 14
$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2/xy = 1\}etB = \{0\} \times \mathbb{R}$

1. Montrer que A et B sont des fermés
2. Montrer que A+B n'est pas fermé

Sujet 8
Questions de cours :
- equivalence des normes
- continuité des applications linéaires
- norme subordonnée

Exercice 15
$E = C([0, 1], \mathbb{R})$ normée par N_∞.Soit $f \in E$ posons$N(f) = \int\limits_0^1 e^t|f(t)|dt$

1. Vérifier que N est une norme
2. Soit (f_n) la suite définie par
   - $f_n(x) = 1 - nx, x \in [0, \frac{1}{n}]$;
   - $f_n(x) = 0, x \in]\frac{1}{n}, 1]$

   Calculer $N_\infty(f_n)$ et $N(f_n)$ et conclure

Exercice 16

$E = C([0,1],\mathbb{R})$ normé par N_1 .Soit$\varphi : E \to \mathbb{R}$l'application définie par $\varphi(f) = \int\limits_0^1 tf(t)dt$

1. Montrer que φ est continue
2. Déterminer $|||\varphi|||$utiliser $f_n(t) = t^n$

Sujet 9

Questions de cours :

1. continuité des applications linéaires
2. caractériser un fermé
3. compacité

Exercice 17

$E = M_n(\mathbb{R})$normé par $N(A) = \max\limits_{1\leq i\leq n}(\sum\limits_{j=1}^{n}|a_{i,j}|)$

1. Vérifier que N est une norme
2. Montrer que tr est continue et determiner sa nome triple

Exercice 18

Montrer que O(n) est compact

Sujet 10

Questions de cours :

- equivalence des normes
- continuité des applications linéaires

Exercice 19

$E = C^2([0,1],\mathbb{R})$ .Soit $f \in E$ .Posons

$N(f) = \int\limits_0^1 |f(t)|dt; N'(f) = |f(0)| + \int\limits_0^1 |f'(t)|dt; N"(f) = |f(0)| + |f'(0)| + \int\limits_0^1 |f"(t)|dt$

1. vérifier que $(\forall f \in E)N'(f) = |f(0)| + N(f); N"(f) = |f(0)| + N'(f')$
2. Montrer que N' et $N"$ sont des normes
3. etudier l'équivalence de ces normes utiliser $f_n(t) = t^n$ et $g_n(t) = \frac{t^n}{n}$

Exercice 20

$E = \mathbb{R}[X]$normé par $N(P) = \sup\limits_{t\in[0,1]} |P(t)|$ et l'application φ définie par $\varphi(P) = P(0)$

1. Montrer que φ est continue dans (E,N)
2. Soit $\Omega = \{P \in E/P(0) \neq 0\}$ Ω est-t-il un ouvert ?

Semaine 2

Sujet 11

Questions de cours :

- partie connexe par arcs
- image continue d'un connexe par arcs
- image continue d'un compact

Exercice 21

Montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe par arcs

Exercice 22
$E=\mathbb{R}[X]$ et $P\in E, N(P)=\sum\limits_{n\in\mathbb{N}}\frac{|P^{(n)}(0)|}{n!}$

1. Montrer que N est une norme
2. Soit $u:E\to\mathbb{R}$ telle que $u(P)=P^{(n)}(0)$ et $v:E\to E$ telle que $v(P)=P'$
   (a) Montrer que u est continue et calculer $|||u|||$
   (b) Montrer que v n'est pas continue

Sujet 12
Questions de cours :
- densité d'une partie A dans une partie B
- Quels sont les sous groupes de $(\mathbb{R},+)$
- partie compacte

Exercice 23
Montrer qu'un hyperplan d'un evn est soit un fermé soit dense dans E

Exercice 24
Soit $\mathbb{C}[X]$ normé par $\|P\|=\max_{k\in\mathbb{N}}|a_k|$

1. Montrer que la boule unité fermée n'est pas compacte
2. Vérifier que $P\to P'$ n'est pas continue
3. Montrer que E n'est pas complet (utiliser $P_n=\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{X^k}{k!}$)

Sujet 13
Questions de cours :
- caractériser un fermé
- diamètre d'un borné

Exercice 25
Soit (E,N) un evn de Banach ,$(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fermés bornés non vides ,décroissante pour l'inclusion et dont les diamètres tendent vers 0 et $B=\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}}B_n$.
Soit $n\in\mathbb{N}$ et$u_n\in B_n$ et $U_n=\{u_p/p\geq n\}$

1. Montrer que $U_n\subset B_n$
2. En déduire que $\delta(U_n)\to 0$
3. Montrer que (u_n) est convergente et soit l sa limite
4. Montrer que $l\in B_n$
5. Soit $x\in E$ supposons que $x\neq l$
   (a) Montrer que $\exists n\in\mathbb{N}\delta(B_n)<d(x,l)$
   (b) En déduire que $x\notin B$
6. Conclure le **théorème des fermés emboîtés**

Sujet 14
Questions de cours :
- valeur d'adherence
- compacité
- caractérisation de la continuité

Exercice 26
Soit (E,N) un evn compact.(x_n) une suite d'elements de E admettant une seule valeur d'adherence x.
But :Montrer que (x_n) converge vers x.
On suppose que (x_n) ne converge pas vers x.

1. Montrer que $(\exists\epsilon>0)(\forall N\in\mathbb{N})\exists n>N\|x_n-x\|\geq\epsilon$
2. Construire $\varphi:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ st croissante telle que : $(\forall n\in\mathbb{N})\|x_{\varphi(n)}-x\|\geq\epsilon$
3. Montrer que $\psi:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ st croissante telle que :$(x_{\varphi o\psi(n)})$ converge vers $y\in E$
4. Montrer que $y\neq x$ et conclure

Exercice 27
Soient E et F deux evn tel que F est compact. f une application de E dans F telle que son graphe Γ est un fermé dans $E\times F$.
But :Montrer que f est continue
Soit $x\in E$ et (x_n)de E tel que (x_n) converge vers x

1. Montrer qu'il existe $\varphi:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ st croissante telle que$f(x_{\varphi(n)}$ converge vers $y\in E$
2. Montrer que $y=f(x)$
3. Montrer que $(f(x_n))$ converge vers $f(x)$ et conclure

Sujet 15
Questions de cours :
- théorème du point fixe

Exercice 28
Soit K un compact convexe d'un evn et $f:K\to K$ une application telle que
$(\forall(x,y)\in K^2)\|f(x)-f(y)\|\leq\|x-y\|$
But :Montrer que f admet au moins un point fixe
Soit $a\in K$ et $n\in\mathbb{N}^*$.$f_n(x)=\frac{1}{n}a+(1-\frac{1}{n})f(x)$

1. Montrer que f_n est une application de K dans K
2. Montrer que f_n est contractante
3. En déduire $(\exists x_n\in K)f_n(x_n)=x_n$
4. Montrer qu'il existe $\varphi:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ st croissante telle que$x_{\varphi(n)}$ converge vers $x\in K$
5. Montrer que $\|f(x)-f_n(x_n)\|\leq\frac{1}{n}(\|a\|+\|f(x)\|)+\|x-x_n\|$
6. En déduire que $(f_{\varphi(n)}(x_{\varphi(n)}))$ converge vers $f(x)$
7. En déduire que $f(x)=x$

Exercice 29
Montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe par arcs

Sujet 16
Questions de cours :
- continuité des applications linéaires
- comment montrer qu'une partie est fermée

Exercice 30
Soit p un projecteur continu d'un $\mathbb{K}$ evn E.

1. Montrer que Im(p) et Ker(p) sont des fermés
2. On suppose que Im(p) et Ker(p) sont complets
   (a) Montrer que p et $q=id_E-p$ sont uniformément continues

(b) Soit (x_n) de Cauchy dans E $.y_n = p(x_n) et z_n = q(x_n)$ Montrer que (y_n) et (z_n) sont convergentes

(c) En déduire que E est complet

Exercice 31
Montrer que $\mathbb{Z}$ est fermé par différentes méthodes

Sujet 17
Questions de cours :
- Théorème du point fixe
- caractériser un fermé

Exercice 32
Soit K un compact convexe d'un evn et $f : K \to K$ une application telle que
$(\forall (x,y) \in K^2) \|f(x) - f(y)\| \leq \|x - y\|$
But :Montrer que f admet au moins un point fixe
Soit $a \in K$ et $n \in \mathbb{N}^*$ $.f_n(x) = \frac{1}{n}a + (1 - \frac{1}{n})f(x)$

1. Montrer que f_n est une application de K dans K
2. Montrer que f_n est contractante
3. En déduire $(\exists x_n \in K) f_n(x_n) = x_n$
4. Montrer qu'il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ st croissante telle que$x_{\varphi(n)}$ converge vers $x \in K$
5. Montrer que $\|f(x) - f_n(x_n)\| \leq \frac{1}{n}(\|a\| + \|f(x)\|) + \|x - x_n\|$
6. En déduire que $(f_{\varphi(n)}(x_{\varphi(n)}))$ converge vers $f(x)$
7. En déduire que $f(x) = x$

Exercice 33
Montrer que $\mathbb{Z}$ est fermé par différentes méthodes

Sujet 18
Questions de cours :
- valeur d'adherence
- compacité

Exercice 34
Soit (E, N) un evn compact.(x_n) une suite d'elements de E admettant une seule valeur d'adherence x.
But :Montrer que (x_n) converge vers x.
On suppose que (x_n) ne converge pas vers x.

1. Montrer que $(\exists \epsilon > 0)(\forall N \in \mathbb{N}) \exists n > N \|x_n - x\| \geq \epsilon$
2. Construire $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ st croissante telle que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \|x_{\varphi(n)} - x\| \geq \epsilon$
3. Montrer que $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ st croissante telle que :$(x_{\varphi o \psi(n)})$ converge vers $y \in E$
4. Montrer que $y \neq x$ et conclure

Exercice 35
Soient E et F deux evn tel que F est compact. f une application de E dans F telle que son graphe Γ est un fermé dans $E \times F$.
But :Montrer que f est continue
Soit $x \in E$ et (x_n)de E tel que (x_n) converge vers x

1. Montrer qu'il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ st croissante telle que$f(x_{\varphi(n)})$ converge vers $y \in E$
2. Montrer que $y = f(x)$

3. Montrer que $(f(x_n))$ converge vers $f(x)$ et conclure

Sujet 19
Questions de cours :
- connexité par arcs
- diamètre d'un borné
- caractériser un fermé

Exercice 36
Soit (E,N) un evn de Banach ,$(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fermés bornés non vides ,décroissante pour l'inclusion et dont les diamètres tendent vers 0 et $B = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} B_n$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ et$u_n \in B_n$ et $U_n = \{u_p / p \geq n\}$

1. Montrer que $U_n \subset B_n$
2. En déduire que $\delta(U_n) \to 0$
3. Montrer que (u_n) est convergente et soit l sa limite
4. Montrer que $l \in B_n$
5. Soit $x \in E$ supposons que $x \neq l$
   (a) Montrer que $\exists n \in \mathbb{N} \delta(B_n) < d(x,l)$
   (b) En déduire que $x \notin B$
6. Conclure le **théorème des fermés emboîtés**

Exercice 37
Montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe par arcs

CALCUL DIFFERENTIEL

Sujet 20
Questions de cours :
- C^1diffeomorphisme d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J de $\mathbb{R}$
- unicité de la différentielle

Exercice 38
Montrer que $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ n'admets pas de limite en $(0,0)$

Exercice 39
Montrer que $\varphi(x,y) = (e^x - e^y, x+y)$ est un C^1 difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$

Sujet 21
Questions de cours :
- dérivabilité de $B(f_1, f_2)$ où B est application bilinéaire continue
- formule de Leibnitz

Exercice 40
La fonction $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^4+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ est-elle continue ,C^1 ?

Exercice 41
Soit (E,N) un evn Montrer que $f : E \to B(0_E, 1), x \mapsto \frac{x}{1+\|x\|}$ est un homéomorphisme

Sujet 22
Questions de cours :

– inégalité des accroissement finis
– théoreme de prolongement des fonctions C^1

Exercice 42

Soit $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3y}{x^4+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$
2. Montrer que f admet des dérivées partielles en $(0,0)$
3. f est-elle différentiable en $(0,0)$?

Exercice 43

$f(x,y) = (x^2+xcosy+y^2, x+sinx+y^3)$ .Déterminer sa matrice jacobienne et son jacobien

Sujet 23

Questions de cours :
– Théorème des accroissements finis
– Théorème du point fixe

Exercice 44

Soit $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application différentiable telle que $(\forall x \in \mathbb{R}^n) |||dg_x||| \leq k$ avec $k \in]0,1[$ et $f(x) = x + g(x)$

1. Montrer que g est contractante
2. En déduire que f est injective
3. Montrer que $\|f(x)\| \to +\infty$ quand$\|x\| \to +\infty$
4. Montrer que f est surjective
5. En déduire que f est bijective

Exercice 45

Montrer que $\varphi(x,y) = (e^x - e^y, x+y)$ est un C^1 difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$

Sujet 24

Questions de cours :
– fonction de classe C^1 sur un ouvert d'un evn
– unicité de la differentielle

Exercice 46

La fonction $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^4+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ est-elle continue ,C^1 ?

Exercice 47

Soit $(E, <|>)$ un espace prehilbertien réel et N la norme issue du produit scalaire

1. Montrer que N est de classe C^1 sur $E - \{0_E\}$
2. Déterminer dN_x

Sujet 25

Questions de cours :
– C^kdiffeomorphisme d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J de $\mathbb{R}$
– fonction de classe C^1 sur un ouvert d'un evn

Exercice 48

Soit $f : M_n(R) \to M_n(R)$ definie par $f(M) = M^2$

1. Montrer que f est de classe C^1
2. determiner sa différentielle

Exercice 49
Soit $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3y}{x^4+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$
2. Montrer que f admet des dérivées partielles en $(0,0)$
3. f est-elle différentiable en $(0,0)$?

Sujet 26
Questions de cours :
- Théorème de Schwartz
- une application C^k soit un C^k diffeo d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J de $\mathbb{R}$
- C^1 diffeo D'un ouvert U d'un evn E sur un ouvert V d'un evn F

Exercice 50
Soit $f : M_n(R) \to M_n(R)$ definie par $f(M) = tr(M^3)$ Montrer que f est differentiable en $M \in M_n(R)$ et determiner sa differentielle

Exercice 51
Montrer que $\varphi(x,y) = (x + \frac{1}{2}cosy, y + \frac{1}{2}cosx)$ est un C^1 difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$

Sujet 27
Questions de cours :
- theoreme des fonctions implicites
- CS pour que $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^2 admette un extremum

Exercice 52
Montrer que la relation $x^4 + x^3y^2 - y + y^2 + y^3 = 1$ définit en $(-1,1)$ une fonction implicite $\varphi : x \to y$ de classe C^∞ et calculer $\varphi'(x)$

Exercice 53
Déterminer les extremums de $f(x,y) = x^3 + 3x^2y - 15x - 12y$

Sujet 28
Questions de cours :
- les deux théorèmes des accroissement finis
- théorème du point fixe

Exercice 54
Soit $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$
2. Montrer que f admet des dérivées partielles en $(0,0)$

Exercice 55
Soit $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application différentiable telle que $(\forall x \in \mathbb{R}^n |||dg_x||| \leq k$ avec $k \in]0,1[$ et $f(x) = x + g(x)$

1. Montrer que g est contractante
2. En déduire que f est injective

3. Montrer que $\|f(x)\| \to +\infty$ quand$\|x\| \to +\infty$
4. Montrer que f est surjective
5. En déduire que f est bijective

Sujet 29
Questions de cours :
- théorème des fonctions implicites

Exercice 56
Montrer que l'équation $ye^x - xe^y = 1$ définit une fonction implicite $y = g(x)$ telle que $g(0) = 1$.donner un $DL_3(g)(0)$

Exercice 57
Résoudre l'équation aux dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x} - 3\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ (poser $u = 2x + y$ et $v = 3x + y$)

Sujet 30
Questions de cours :
- Théorème d'inversion locale

Exercice 58
Soit $f(x, y, z) = (x + 3y^2 - z^2, 2x^3yz, 2z^2 - xy)$
1. determiner la matrice jacobienne de f en $(1, -1, 0)$
2. f est elle localement inversible au voisinage de $(1, -1, 0)$
3. determiner la matrice jacobienne de f^{-1} en $(4, 0, 1)$

Exercice 59
Résoudre l'équation aux dérivées partielles $3\frac{\partial f}{\partial x} - 2\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ (poser $u = x + y$ et $v = 2x + 3y$)

Sujet 31
Questions de cours :
- théorème d'extremum liées de Lagrange

Exercice 60
Extremum de la fonction f definie sur $(\mathbb{R}_+^*)^3$ par $f(x, y, z) = xln(x) + yln(y) + zln(z)$ sur $\Gamma = \{(x, y, z) \in (\mathbb{R}_+^*)^3 / x + y + z = 3a\}(a > 0)$

Exercice 61
Résoudre l'équation aux dérivées partielles $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ (poser $u = x + y$ et $v = x - y$)

Sujet 32
Questions de cours :
- théorème des fonctions implicites

Exercice 62
Montrer que l'équation $e^{xy} + y^2 - xy - 3y + 2x = -1$ définit une fonction implicite $y = g(x)$ telle que $g(0) = 1$.donner un $DL_2(g)(0)$

Exercice 63
Résoudre l'équation aux dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x} - 3\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ (poser $u = 2x + y$ et $v = 3x + y$)

Exercice 64
Calculer grace à une dérivation le determinant suivant
$$\begin{vmatrix} 1 & cos(x) & sin(x) \\ 1 & cos(x+\alpha) & sin(x+\alpha) \\ 1 & cos(x+\beta) & sin(x+\beta) \end{vmatrix}$$

Sujet 33
Questions de cours :
- Théorème d'inversion locale

Exercice 65
Soit $f(x, y, z) = (x + 3y^2 - z^2, 2x^3yz, 2z^2 - xy)$

1. determiner la matrice jacobienne de f en $(1, -1, 0)$
2. f est elle localement inversible au voisinage de $(1, -1, 0)$
3. determiner la matrice jacobienne de f^{-1} en $(4, 0, 1)$

Exercice 66
Résoudre l'équation aux dérivées partielles $3\frac{\partial f}{\partial x} - 2\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ (poser $u = x + y$ et $v = 2x + 3y$)

Exercice 67
Démontrer que la relation $x + y + z + sin(xyz) = 0$ definit une fonction implicite φ : $(x, y) \to z$ en $(0, 0, 0)$

Sujet 34
Questions de cours :
- théorème des extremums liées de Lagrange

Exercice 68
Extremum de la fonction f definie sur $(\mathbb{R}_+^*)^3$ par $f(x, y, z) = xln(x) + yln(y) + zln(z)$ sur $\Gamma = \{(x, y, z) \in (\mathbb{R}_+^*)^3 / x + y + z = 3a\}(a > 0)$

Exercice 69
Soit (C) la courbe d'équation $sin(x + y) + cos(x - y) = 1$.Montrer que le théorème des fonctions implicites est applicable en tout point de (C)et determiner l'allure de la courbe au voisinage de $O(0, 0)$

Exercice 70
Résoudre l'équation aux dérivées partielles $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ (poser $u = x + y$ et $v = x - y$)

Sujet 35
Questions de cours :
- théorème des extremums liées de Lagrange

Exercice 71
Chercher les extrema de l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par : $f(x, y) = x^3 + y^2$ sous la contrainte :$x + y^2 = 3$.

Exercice 72
Montrer que l'application $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, (x, y, z) \mapsto (e^{2y} + e^{2z}, e^{2x} - e^{2z}, x - y)$est un C^1 diffeomorphisme de $\mathbb{R}^3$ sur son image que l'on determinera.

Exercice 73
Résoudre l'équation aux dérivées partielles $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ (poser $u = x + y$ et $v = x - y$)

Sujet 36
Questions de cours :
- théorème des fonctions implicites

Exercice 74
Montrer que l'équation $ye^x + e^y sin(2x) = 0$ définit une fonction implicite $y = g(x)$ telle que $g(0) = 0$.donner un $DL_1(g)(0)$

Exercice 75
Résoudre l'équation aux dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x} - 3\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ (poser $u = 2x + y$ et $v = 3x + y$)

Exercice 76
Calculer grace à une dérivation le determinant suivant
$\begin{vmatrix} 1 & cos(x) & sin(x) \\ 1 & cos(x+\alpha) & sin(x+\alpha) \\ 1 & cos(x+\beta) & sin(x+\beta) \end{vmatrix}$

Sujet 37
Questions de cours :
- Théorème d'inversion locale

Exercice 77
Soit $f(x, y, z) = (x + 3y^2 - z^2, 2x^3yz, 2z^2 - xy)$

1. determiner la matrice jacobienne de f en $(1, -1, 0)$
2. f est elle localement inversible au voisinage de $(1, -1, 0)$
3. determiner la matrice jacobienne de f^{-1} en $(4, 0, 1)$

Exercice 78
Résoudre l'équation aux dérivées partielles $3\frac{\partial f}{\partial x} - 2\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ (poser $u = x + y$ et $v = 2x + 3y$)

Exercice 79
Démontrer que la relation $x + y + z + sin(xyz) = 0$ definit une fonction implicite φ : $(x, y) \to z$ en $(0, 0, 0)$

Exercice 80
Soient $k \in]0, 1[$ et $f \in C^(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $\forall x \in \mathbb{R} |f'(x)| \leq k$. Montrer que l'application $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (y + f(x), x + f(y))$est un C^1 diffeomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur lui meme

Arithmetique dans $\mathbb{Z}$ et$\mathbb{K}[X]$

Sujet 38
Questions de cours :
- Ideal d'un anneau
- existence du pgcd dans $\mathbb{K}[X]$

Exercice 81
on suppose qu'il existe un nombre fini N d'entiers premiers de la forme $4n - 1$ où $n \geq 1$ qu'on note $p_1, ..., p_N$ et on forme le nombre $4p_1...p_N - 1$.Montrer que ce nombre admet un diviseur premier de la forme $4k - 1$ et on déduire une contradction.conclure

Exercice 82 ***Radical d'un ideal***
Soit I un ideal d'un anneau commutatif $(A, +, \times)$,on pose$\sqrt{I} = \{x \in A/(\exists n \in \mathbb{N})x^n \in I\}$

1. Montrer que $\sqrt{I}$ est un ideal de A
2. Montrer que $\sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I}$
3. Montrer que $I \subset J \Rightarrow \sqrt{I} \subset \sqrt{J}$

Sujet 39
Questions de cours :
- Ideal d'un anneau
- existence du ppcm dans $\mathbb{K}[X]$

Exercice 83 ***Produit de deux ideaux***
Soit I et J deux ideaux d'un anneau commutatif $(A, +, \times)$,
on pose$I.J = \{x \in A/(\exists n \in \mathbb{N}^*)(\exists(x_1, ..., x_n) \in I^n \in I)(\exists(y_1, ..., y_n) \in J^n)x = \sum_{k=1}^{n} x_i y_i\}$

1. Montrer que $I.J$ est un ideal de A
2. Montrer que $I.J \subset I \cap J$
3. Montrer que dans $\mathbb{Z}$ on a $a\mathbb{Z}.b\mathbb{Z} = ab\mathbb{Z}$

Exercice 84
Soit $P(X) \in \mathbb{K}[X]$ .Montrer que $P(X) - X/P(P(X)) - X$

Sujet 40
Questions de cours :
- Ideal d'un anneau
- Montrer que tout ideal de $\mathbb{K}[X]$ est de la forme P.$\mathbb{K}[X]$

Exercice 85 ***Transporteur d'un ideal dans un autre***
Soit I et J deux ideaux d'un anneau commutatif $(A, +, \times)$,
on appelle transporteur de J dans I l'ensemble $I : J = \{x \in A/xJ \subset I$

1. Montrer que $I : J$ est un ideal de A
2. Montrer que $I \subset J \Rightarrow I : J = A$
3. Montrer que $I : 0 = A$, $I : A = I$ et $A : I = A$

Exercice 86
Montrer que Soient n et m deux entiers tel que $n > m \geq 1$.
Montrer que $X^n - 1 \wedge X^m - 1 = X^{n \wedge m} - 1$

Sujet 41
Questions de cours :
- isomorphisme entre un supplémentaire du noyau et l'image d'une application linéaire
- déduire thm du rang

Exercice 87
Montrer que les matrices par blocs où $A \in M_n(\mathbb{R})$:
$\begin{pmatrix} 2A & -5A \\ A & -2A \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & -A \\ A & 0 \end{pmatrix}$ sont semblables

Exercice 88
Radical d'un ideal
Soit I un ideal d'un anneau commutatif $(A, +, \times)$,on pose$\sqrt{I} = \{x \in A/(\exists n \in \mathbb{N})x^n \in I\}$

1. Montrer que $\sqrt{I}$ est un ideal de A
2. Montrer que $\sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I}$
3. Montrer que $I \subset J \Rightarrow \sqrt{I} \subset \sqrt{J}$

Exercice 89
Dans $\mathbb{R}^2$,on définit $v_1 = (1, 1)$ et $v_2 = (2, 3)$ calculer la base duale de (v_1, v_2)

Sujet 42
Questions de cours :
- formes linéaires de même noyau

Exercice 90
soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$ ev de dimension finie n .Montrer que $(Id, f, f^2, ..., f^{n^2})$ est liée et en déduire l'existence d'un polynôme annulateur non nul de f

Exercice 91
Radical d'un ideal
Soit I un ideal d'un anneau commutatif $(A, +, \times)$,on pose$\sqrt{I} = \{x \in A/(\exists n \in \mathbb{N})x^n \in I\}$

1. Montrer que $\sqrt{I}$ est un ideal de A
2. Montrer que $\sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I}$
3. Montrer que $I \subset J \Rightarrow \sqrt{I} \subset \sqrt{J}$

Exercice 92
Dans $\mathbb{R}^3$,on définit $v_1 = (1, 1, 1); v_2 = (1, 2, 1); v_3 = (0, 1, 1)$ calculer la base duale de $(v_1, v_2; v_3)$

Sujet 43
Questions de cours :
- base antéduale

Exercice 93
Soient $a_0, a_1, ..., a_n\mathbb{R}$ deux à deux distincts .
Montrer que $\exists!(\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}\forall P \in \mathbb{K}_n[X] \int\limits_0^1 P(t)dt = \sum\limits_{k=0}^{n} \lambda_k P(a_k)$

Exercice 94
Radical d'un ideal
Soit I un ideal d'un anneau commutatif $(A, +, \times)$,on pose$\sqrt{I} = \{x \in A/(\exists n \in \mathbb{N})x^n \in I\}$

1. Montrer que $\sqrt{I}$ est un ideal de A
2. Montrer que $\sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I}$
3. Montrer que $I \subset J \Rightarrow \sqrt{I} \subset \sqrt{J}$

Exercice 95
Dans $\mathbb{R}^3$,on définit $v_1 = (0, 1, 1); v_2 = (1, -1, 2); v_3 = (2, 1, -1)$ calculer la base duale de $(v_1, v_2; v_3)$

Sujet 44
Questions de cours :
- existence de la base anteduale

Exercice 96
Soit E un $\mathbb{K}$ ev de dimension infinie et $f, g \in \mathcal{L}(E)$ verifiant $fog = Id_E$

1. Montrer que $Ker(gof) = Ker(f)$
2. Montrer que $Im(gof) = Im(g)$
3. Montrer que $E = Im(g) \oplus Ker(f)$

Exercice 97
$Soit E = \mathbb{R}_3[X]$
Montrer que $\forall P \in E\exists!(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \int\limits_{-1}^{1} \frac{P(t)}{1+t^2}dt = aP(1) + bP(2) + cP(3) + dP(4)$

Sujet 45
Questions de cours :

– formes linéaires de même noyau

Exercice 98
Soit $B = \begin{pmatrix} -8 & -14 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

1. Chercher un polynôme annulateur de B
2. Calculer B^n pour $n \in \mathbb{N}$

Exercice 99
Dans $\mathbb{R}^2$,on définit $v_1 = (1,1)$ et $v_2 = (2,3)$ calculer la base duale de (v_1, v_2)

Sujet 46
Questions de cours :
– sous espaces stables par un endomorphisme de E

Exercice 100
Dans l'espace $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$,montrer que la famille $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est libre où $f_n(x) = sh(nx)$

Exercice 101
Dans $\mathbb{R}^3$,on définit $v_1 = (0,1,1); v_2 = (1,-1,2); v_3 = (2,1,-1)$ calculer la base duale de $(v_1, v_2; v_3)$

Sujet 47
Questions de cours : Théoreme du rang

Exercice 102
Soit E un espace de dimension finie n ,f et g deux endomorphismes de E tels que :
$E = Im(f) + Im(g) = Ker(f) + Ker(g)$
Montrer que ces sommes sont directes

Exercice 103
Soit E un espace de dimension finie n. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\forall g \in \mathcal{GL}(E) fog = gof$
Supposons que f n'est pas une homothétie.

1. Montrer que $(\exists u \in E)(u, f(u))$ est libre qu'on complete en une base $(u, f(u), e_3, ..., e_n)$
2. Soit $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $g(u) = u, g(f(u)) = u + f(u), g(e_i) = e_i$ pour $i = 3, ..., n$
   Montrer que $g \in \mathcal{GL}(E)$
3. Montrer que $fog \neq gof$ et conclure

Sujet 48
Questions de cours :base anteduale

Exercice 104
E un $\mathbb{R}$ ev de dimension 3,(e_1, e_2, e_3) une base de E et (e_1^*, e_2^*, e_3^*) sa base duale
$\varphi_1 = 2e_1^* + e_2^* + e_3^*, \varphi_2 = -e_1^* + 2e_2^*, \varphi_3 = e_1^* + 3e_2^*$ Montrer que $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ est une base de E^* et determiner sa base anteduale

Exercice 105
Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

1. Montrer que $A - I_3$ est nilpotente
2. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$

Sujet 49
Questions de cours : deux formes linéaires de même noyau

Exercice 106
Soit E un espace de dimension finie n,f un endomorphisme de E.On suppose qu'il existe x_0 de E tel que $B = (f(x_0), f^2(x_0), ..., f^n(x_0))$ forme une base de E

1. Montrer que f est bijective
2. Montrer qu'il existe $a_0, ..., a_{n-1} \in \mathbb{K}^n$ tel que $f^n + a_{n-1}f^{n-1} + ... + a_1 f + a_0 Id_E = 0$

Exercice 107
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & C_1^1 & C_2^1 & \cdots & C_n^1 \\ \vdots & \ddots & C_2^2 & \cdots & C_2^n \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & C_n^n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$
Montrer que M est inversible et determiner M^{-1}

Réduction des endomorphismes

Sujet 50
Questions de cours :
– théorème de decomposition des noyaux
– cas d'un polynôme annulateur

Exercice 108
Soit E un espace de dimension finie n, $f \in \mathcal{L}(E)$.On suppose qu'il existe x_0 de E tel que $B = (x_0 f(x_0), f^2(x_0), ..., f^{n-1}(x_0))$ soit libre dans E Montrer que tout endomorphisme de E commutant avec f est un polynôme en f

Exercice 109
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^3 = Id_E$ Montrer que $E = Ker(u - Id_E) \oplus Ker(u^2 + u + Id_E)$

Sujet 51
Questions de cours :
– sous espaces stables
– Endomorphisme induit

Exercice 110
Soit E un $\mathbb{K}$ev et $\in \mathcal{L}(E)$ Montrer que f commute avec un projecteur de E si et seulement si $Ker(p)$ et $Im(p)$ sont stables par f

Exercice 111
en utilisant le théorème de Cayley Hamilton ,montrer que $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ est inversible et determiner son inverse

Sujet 52
Questions de cours :
– Polynôme minimal
– son existence en dim fini

Exercice 112
Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$,non nulle et telle que $M^3 = -M$ et u l'endomorphisme de $E = \mathbb{R}^3$ associé canoniquement à M

1. Montrer que $E = Ker(u) \oplus Ker(u^2 + Id_E)$
2. En deduire que M est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 113
Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
Determiner le polynôme minimal de A

Sujet 53
Questions de cours :
Théorème de decomposition des noyaux

Exercice 114
Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ determiner les valeurs propres de A ,est -elle diagonalisable

Exercice 115
Soit E un $\mathbb{R}$ ev de dimension 3 et f un endomorphisme de E tel que $f^4 = f^2$. On suppose que -1 et 1 sont des valeurs propres de f .Montrer que f est diagonalisable.

Sujet 54
Questions de cours :
conditions de diagonalisabilité

Exercice 116
Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

1. Calculer χ_A
2. determiner le reste de la division euclienne de X^n par χ_A
3. En déduire A^n

Exercice 117
Soit E un $\mathbb{R}$ ev et f un endomorphisme de E tel que $f^3 = 4f$. Monter que la trace de f est un entier pair.

Sujet 55
Questions de cours :
conditions de trigonalisibilité

Exercice 118
Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et $A' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

1. Montrer que A et A' sont semblables
2. Determiner toutes les matrices commutant avec A
3. Résoudre l'équation $X^2 = A$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

Exercice 119
Soit E un $\mathbb{R}$ ev de dimension n et f un endomorphisme de E tel que $f^3 = f$.Montrer que f est diagonalisable

Sujet 56
Questions de cours :
C.N.S de diagonalisation portant sur le polynôme caractéristique

Exercice 120
Réduire la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Exercice 121
Soit E un $\mathbb{R}$ ev de dimension 3 et f un endomorphisme de E tel que $f^4 = f^2$. On suppose que -1 et 1 sont des valeurs propres de f .Montrer que f est diagonalisable.

Sujet 57
Questions de cours :
C.N.S de trigonalisation portant sur le polynôme caractéristique

Exercice 122
Réduire $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 123
Soit E un $\mathbb{R}$ ev et f un endomorphisme de E tel que $f^3 = 4f$. Monter que la trace de f est un entier pair.

Sujet 58
Questions de cours :
Théorème de decomposition des noyaux-Théorème de Cayley Hamilton

Exercice 124
Réduire $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 125
Soit E un $\mathbb{R}$ ev de dimension n et f un endomorphisme de E tel que $f^3 = f$.Montrer que f est diagonalisable

Sujet 59
Questions de cours :C.N.S de diagonalisation portant sur le polynôme caractéristique

Exercice 126
Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ tel que :
$Sp(f) = \{2, -3\}, E_2(f) = vect((1, 2))$ et $E_{-3}(f) = vect((1, 1))$

1. justifier que f est diagonalisable
2. justifier que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^2$
3. Calculer la trace de f et le determinant de f
4. en déduire χ_f
5. Calculer la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$

Exercice 127
Montrer que $A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \nearrow & \nearrow & 0 \\ 0 & \nearrow & \nearrow & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ est diagonalisable

Sujet 60
Questions de cours :C.N.S de trigonalisation portant sur le polynôme caractéristique

Exercice 128

Determiner u_n, v_n et w_n définies par : $\left\{\begin{array}{l} u_0 = -2 \\ v_0 = 1 \\ w_0 = 5 \end{array}\right.$ et $\left\{\begin{array}{l} u_{n+1} = 4u_n - 3v_n - 3w_n \\ v_{n+1} = 3u_n - 2v_n - 3w_n \\ w_{n+1} = 3u_n - 3v_n - 2w_n \end{array}\right.$

Exercice 129

Démontrer, en détaillant, que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ est semblable à la matrice $T = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Pour cela, on donnera une matrice de passage que l'on notera P.

Sujet 61
Questions de cours :Théorème de decomposition des noyaux -théorème de Cayley Hamilton

Exercice 130 ***Matrices stochastiques***

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall i, j \ a_{i,j} \in [0, 1]$ et $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1$

1. Montrer que 1 est une valeur propre
2. Soit λ une valeur propre de A
   (a) Montrer que $|\lambda| \leq 1$
   (b) Montrer que $\exists i \in [1, n] |\lambda - a_{i,i}| \leq 1 - a_{i,i}$

Exercice 131

Resoudre dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'équation $X^2 = A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 8 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Sujet 62
Questions de cours :
– Identités de polarisation et unicité de la f.b.s associé à une f.q
– Vecteur isotrope cone isotrope

Exercice 132
Rang et signature de la forme quadratique : $q(x, y, z) = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 2xy - 2xz - 2yz$

Exercice 133
Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ et φ l'application dans E par $\varphi(P) = \int\limits_{-1}^{1} P(t)P(-t)dt$

1. Montrer que φ est une forme quadratique
2. Montrer que $E = \mathcal{P} \oplus^{\perp} \mathcal{I}$ où $\mathcal{P}$ est le sous espace des polynômes pairs et $\mathcal{I}$ est le sous espace des polynômes impairs
3. determiner la signature de φ

Sujet 63
Questions de cours :
– Noyau d'une f.q
– forme quadratique non dégénérée

Exercice 134
Rang et signature de la forme quadratique : $q(x, y, z) = x^2 + y^2 + 5z^2 + 6xy - 2xz - 2yz$

Exercice 135
Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ et φ l'application dans E par $\varphi(P) = \int\limits_{-1}^{1} P(t)P(-t)dt$

1. Montrer que φ est une forme quadratique
2. Montrer que $E = \mathcal{P} \oplus^{\perp} \mathcal{I}$ où $\mathcal{P}$ est le sous espace des polynômes pairs et $\mathcal{I}$ est le sous espace des polynômes impairs
3. determiner la signature de φ

Sujet 64
Questions de cours :
– forme quadratique non dégénérée
– Inégalité de Cauchy Schwartz

Exercice 136
Rang et signature de la forme quadratique : $q(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy - 4xz - 6yz$

Exercice 137
Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ et φ l'application dans E par $\varphi(P) = \int\limits_{-1}^{1} P(t)P(-t)dt$

1. Montrer que φ est une forme quadratique
2. Montrer que $E = \mathcal{P} \oplus^{\perp} \mathcal{I}$ où $\mathcal{P}$ est le sous espace des polynômes pairs et $\mathcal{I}$ est le sous espace des polynômes impairs
3. determiner la signature de φ

Sujet 65
Questions de cours :
énoncer et démontrer l'inégalité de Cauchy Schwartz

Exercice 138
On pose $q(A) = (tr(A))^2$

1. Montrer que q est une forme quadratique sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
2. Montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = Ker(tr) \oplus^{\perp} \mathbb{R}.I_n$
3. En déduire la signature de q

Exercice 139
Dans $\mathbb{R}^4$ soit F le sev engendré par $e_1 = (1,1,1,0)$ et $e_2 = (1,1,0,1)$

1. Déterminer dans la base canonique la matrice de p_F
2. calculer $d(u,F)$ si $u \in \mathbb{R}^4$

Sujet 66
Questions de cours :
L'orthonormalisée de Schmidt

Exercice 140
Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ muni du produit scalaire $< P \mid Q >= \int\limits_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt$.
Determiner l'orthonormalisée de Schmidt de la base canonique de E

Exercice 141
Montrer que $\forall (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n (\sum\limits_{k=1}^{n} x_k)^2 \leq n \sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2)$

Sujet 67
Questions de cours :
E un espace préhilbertien réel à quelle condition on a $E = F \oplus F^{\perp}$ démontrer le

Exercice 142
Soit E un espace préhilbertien réel et $(e_1, e_2, ..., e_n)$ n vecteurs **unitaires** de E tel que
$\forall x \in E \|x\|^2 = \sum\limits_{k=1}^{n} < e_k \mid x >^2$
Montrer que $(e_1, e_2, ..., e_n)$ est une b.o.n de E

Exercice 143
On pose $q(A) = tr({}^tAA)$

1. Montrer que q est une forme quadratique sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
2. En déduire la signature de q

Sujet 68
Questions de cours :représentation des formes linéaires dans un espace euclidien

Exercice 144
Soient F et G deux sev d'un espace euclidien E .Montrer que :
$(F+G)^{\perp} = F^{\perp} \cap G^{\perp} et (F \cap G)^{\perp} = F^{\perp} + G^{\perp}$

Exercice 145
On munit $E = \mathbb{R}[X]$ du produit scalaire $< P \mid Q >= \int\limits_0^1 P(t)Q(t)dt$
Soit φ la forme définie sur E par $\varphi(P) = P(0)$.
Montrer qu'il n'existe pas de vecteur A de E tel que $\forall P \in E \varphi(P) =< A \mid P >$

Sujet 69
Questions de cours : théorème de projection

Exercice 146
$E = \mathbb{R}_3[X]$ muni de son produit scalaire canonique ,
determiner $d(X, Ker\varphi)$ où $\varphi(P) = P(1)$

Exercice 147

1. l'application $q : (x, y, z) \to xy + xyz + yz$ est elle une forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$?
2. Établir que $q(P) = \int\limits_0^1 P(t)P'(t)dt$ définit une forme quadratique sur $\mathbb{R}[X]$

Sujet 70
Questions de cours :expression d'une réflexion

Exercice 148
Soit q l'application de $E = \mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}$ définie par $q(P) = 2P(1)P'(1)$

1. q est -elle une forme quadratique ? si oui dtm sa forme polaire
2. Determiner la matrice de Q dans la base $(1, X, X^2)$
3. Determiner le noyau de q ,est-elle non dégénérée ?

Exercice 149
Dans $\mathbb{R}^3$,déterminer la matrice de la projection orthogonale sur le plan d'équation :
$x - 2y + z = 0$

Sujet 71
Questions de cours :Theoreme spectral

Exercice 150
Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère $a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}$ deux à deux distincts.Notons $E = \mathbb{R}_n[X]$

1. Montrer que $\phi(P, Q) = \sum\limits_{k=0}^{n} P(a_k)Q(a_k)$ définit un produit scalaire sur E
2. Montrer que $(L_0, ...L_n)$ est une b.o.n de E où (L_k) polynômes de Lagrange

Exercice 151
Vérifier que la matrice $\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$ est symétrique est -elle diagonalisable (sur $\mathbb{C}$) ? conclure

Sujet 72
Questions de cours :theoreme de projection

Exercice 152
Notons $E = \mathcal{M}_n(R)$

1. Montrer que $\phi(A, B) = tr({}^tAB)$ définit un produit scalaire sur E
2. Montrer que (I_3, B) est une famille orthogonale où $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
3. determiner le projeté orthogonal de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ sur $vect(I, B)$

Exercice 153
Quelles sont les matrices orthogonales et triangulaires superieures

Sujet 73
Questions de cours : automorphisme orthogonal

Exercice 154
On considere $E = \mathbb{R}_n[X]$ muni du produit scalaire $< P \mid Q >= \int\limits_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt$

1. Démontrer que $f(P) = (1 - X^2)P" - 2XP'$ est symétrique
2. Determiner la matrice de F dans la base canonique de E.Est-elle symétrique ?
3. Determiner le spectre de f et en déduire que f est diagonalisable

Exercice 155
Soit f un endomorphisme d'un espace euclidien tel que $f^2 = 0$
Montrer que $Ker(f + f^*) = Ker(f) \cap Ker(f^*)$

Sujet 74
Questions de cours :Adjoint d'un endomorphisme de E euclidien

Exercice 156
Soit E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$ telle que $uou^* = u^*ou$

1. Montrer que u et u^* ont même noyau
2. Montrer que $Sp(u) = Sp(u^*)$et que $E_\lambda(u) = E_\lambda(u^*)$
3. Montrer que les sous espaces propres de u sont orthogonaux deux à deux

Exercice 157

1. Montrer que $< P \mid Q >= P(0)Q(0)+P(1)Q(1)+P(2)Q(2)$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$
2. Calculer $d(X^2, P)$ où $P = \{aX + b/(a, b) \in \mathbb{R}^2\}$

Sujet 75
Questions de cours :Theoreme de projection

Exercice 158

1. Montrer que $\phi(A, B) = tr({}^tAB)$ définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
2. Montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus^\perp \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$
3. Calculer d(A,$\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$) où $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Exercice 159
Calculer $\min\limits_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3} \int\limits_0^1 (t^3 - at^2 - bt - c)^2 dt$

Sujet 76
Questions de cours :Theoreme spectral

Exercice 160

1. Montrer que $\phi(A, B) = tr({}^tAB)$ définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
2. Soit f'application define sur E par $f(X) = AX - XA$
   (a) Montrer que $f \in \mathcal{L}(E)$
   (b) Determiner f^*

Exercice 161
On pose $\varphi(P, Q) = \int\limits_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}dt$

1. Montrer que φ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$
2. Calculer $< X^p \mid X^q >$
3. Calculer $\min\limits_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int\limits_0^{+\infty} (t^2 - at - b)^2 e^{-t} dt$