## الحسابيات في $\mathbb{Z}$ 2 س ب ع ر1 elouadih 2011/2012

### تمرين1

حدد باقي قسمة $8^{2004}$ على $5$ : حدد باقي قسمة $33^{38}$ على $7$ : حدد باقي قسمة $2917^{541}$ على $5$: حدد باقي قسمة $224-(523)^{100}+42\times(487)^{200}\times 35$ على $5$: حدد باقي قسمة $275423^n$ على $3$: حدد باقي قسمة $(275423)^n+(372121)$ على $3$

### تمرين2

بين أن $11/2^{123}+3^{121}$

### تمرين3

1. بين أن $\forall n\in\mathbb{N}: 10^{3n}\equiv 1[37]$
2. استنتج باقي قسمة $10^{10}+10^{20}+10^{30}$ على 37

### تمرين4

بين أن $\forall n\in\mathbb{N}: 7\not| 2^n+3^n+5^n$

### تمرين5

حدد رقم الوحدات ل: $7^{9^9}$ و $(2537)^{31}+(3548)^9$

### تمرين6

حل في $\mathbb{Z}$

1. $x-1/x+3$
2. $x+2/x^2+2$
3. $x-3/x^3-3$

### تمرين7

ليكن $p$ عدد أولي.بين أن $\bar{y}\neq\bar{0}$ و $\bar{x}.\bar{y}=\bar{0}\Leftrightarrow\bar{x}=\bar{0}$ في $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$

### تمرين8

حل المعادلات التالية

1. $\bar{3}x^2-x-\bar{2}=\bar{0}$ في $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$
2. $x^2-\bar{3}x+\bar{2}=\bar{0}$ في $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$
3. $2x^2-3x-2\equiv 0[7]$ في $\mathbb{Z}$
4. $x^2-2x-2\equiv 0[5]$ في $\mathbb{Z}$
5. $x^2=\bar{1}$ في $\mathbb{Z}/18\mathbb{Z}$
6. $\begin{cases}\bar{5}x+\bar{2}y=\bar{3}\\ \bar{2}x+\bar{4}y=\bar{6}\end{cases}$ في $\left(\mathbb{Z}/20\mathbb{Z}\right)^2$
7. $x^2+\bar{2}x-\bar{3}=\bar{0}$ في $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$

### تمرين9: Théorème des restes chinois

1. حل في $\mathbb{Z}$ النظمات التالية: $\begin{cases}x\equiv 4[6]\\ x\equiv 2[11]\end{cases}$ و $\begin{cases}x\equiv 0[289]\\ x\equiv 1[361]\end{cases}$

2. $A$ عدد صحيح ادا قسمته على 8 فان الباقي هو 1 و ادا قسمته على 5 فان الباقي هو2 فماهو باقي قسمته على 40؟

## تمرين10

حل المعادلة $x^3 = x$ في $\mathbb{Z}/449\mathbb{Z}$ ثم في $\mathbb{Z}/143\mathbb{Z}$

## تمرين11

1. ليكن $p$ عدد أولي .حل في $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ المعادلة $x^2 = \bar{0}$

2. حل في $\mathbb{Z}/49\mathbb{Z}$ المعادلة $x^2 + \overline{16}x + \overline{15} = \bar{0}$

## تمرين12

$$\forall n \in \mathbb{N} : (n!+1) \wedge ((n+1)!+1) = 1$$

بين أن $\forall n \in \mathbb{Z} : (21n+4) \wedge (14n+3) = 1$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : (n^3 + 2n) \wedge (n^4 + 3n^2 + 1) = 1$$

## تمرين13

حل في $\mathbb{N}^2$ $\quad m = x \vee y \ ; \ d = x \wedge y$

1. $xy = 1512; x \vee y = 252$
2. $xy = 300; x \vee y = 60$
3. $x + y = 276; x \vee y = 1440$
4. $m - d = 187$
5. $m = 30; d = 5$
6. $10 \prec d \prec 15 \quad m - 3d = 108$
7. $m = 300 \ ; \ d = 60$
8. $\begin{cases} m = 340 \\ x(y+25) = y(x+20) \end{cases}$
9. $\begin{cases} x + y = 1008 \\ x \wedge y = 24 \end{cases}$

## تمرين14

أعط مصادق قابلية القسمة على2-3-4-5-8-25

## تمرين15

$A = \overline{1x5y4}^6$ حدد جميع الأزواج $(x, y)$ من $\mathbb{N}^2$ بحيث يكون:

1. $35 / A$
2. $70 / A$

## تمرين 16

1. حدد بواقي قسمة $10^n$على7
2. حدد $x$و $y$بحيث يكون العدد $\overline{2xyx^2}^{10}$ قابل للقسمة على 21

## تمرين17

1. بين أن التطبيق $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}^* \\ (n, p) \mapsto (2p+1)2^n$ تقابل
2. بين أن $\mathbb{N}$ و $\mathbb{N}^2$ متقادرتان

## تمرين 18

لبكن $n$ عدد طبيعي بحيث $n = abc$ مع $a$ و $b$ و $c$ أعداد أولية و $a \prec b \prec c$ و $c = a + b$

1. حدد $a$
2. أعط عددا طبيعيا يحقق الشروط أعلاه
3. نفترض أن $N_1 \le n \le N_2$ اطر العدد $b$
4. نعطي $N_1 = 6.10^4$ و $N_2 = 8.10^4$ حدد جميع الأعداد التي تحقق الشروط السابقة

**تمرين19**

حل في $\mathbb{Z}^2$ :

1. $51x + 44y = 1$
2. $192x + 39y = 192 \wedge 39$
3. $151x - 77y = 5$
4. $700x + 429y = 1$
5. $442x + 495y = 1$

**تمرين20**

بين أن $\forall (x,y) \in \mathbb{Z}^2 \; 17 / 2x + 3y \Leftrightarrow 17 / 9x + 5y$

**تمرين21**

حل في $\mathbb{Z}^3$ : $\begin{cases} x + 2y - z \equiv 4 \; [5] \\ x + y + z \equiv 1 \; [5] \end{cases}$

**تمرين22**

ليكن $n$ عددا طبيعيا و $n \ge 4$

1. بين أن $(n^2 - n - 10) \wedge (n+4) = (n+4) \wedge 10$
2. حدد القيم الممكنة $(n^2 - n - 10) \wedge (n+4)$
3. حدد $n$ بحيث $(n+4) / (n^2 - n - 10)$

$$A = n^2 - n - 10 \; ; \; B = n + 4$$

4. نضع $A' = \dfrac{A}{A \wedge B} \; ; B' = \dfrac{b}{A \wedge B}$

أ. بين أن $\begin{cases} A \wedge B = 5 \\ A \vee B = 300 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A'B' = 60 \\ ' \quad \text{Bي} \end{cases}$

ب. حدد $n$ بحيث $\begin{cases} A \wedge B = 5 \\ A \vee B = 300 \end{cases}$

**تمرين23**

حدد جميع الأزواج $(x,y)$ من $\mathbb{N}^{*2}$ بحيث $\begin{cases} x \vee y = 420 \\ x \wedge y = 12 \end{cases}$

**تمرين24**

حدد جميع الأزواج $(x,y)$ من $\mathbb{N}^{*2}$ بحيث $\begin{cases} x \vee y = 105 \\ x + y = 56 \end{cases}$

**تمرين25**

$n \ge 2 : u_n = 2^n - 3$

1. بين أنه يوجد مالا نهاية من الحدود المضاعفة 13
2. بين أنه يوجد مالا نهاية من الحدود المضاعفة 5
3. بين أنه يوجد أي حد مضاعف ل 65

**تمرين26**

نعتبر المتتالية التالية $\begin{cases} u_0 = 2\ ; u_1 = 11 \\ u_{n+2} = 11u_{n+1} - 30u_n \end{cases}$

1. حدد الحد العام ل $(u_n)$
2. بين أن $n$ فردي $\Leftarrow 11/u_n$
3. حدد $u_n \wedge u_{n+1}$

**تمرين 27**

1. بين أن $\forall (a,b) \in \mathbb{Z}^{*2}\ a \wedge b = 1 \Rightarrow \left(a^2 + b^2\right) \wedge ab = 1$
2. حل في $\mathbb{N}^{*2}$ النظمة التالية $\begin{cases} x^2 + y^2 = 19476 \\ x \wedge y = 1260 \end{cases}$

**تمرين28**

1. بين أن $\forall n \in \mathbb{N}\ \ 10/n^5 - n$
2. بين أن $\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2\, 10/m^5 - n^5 \Rightarrow 20/m^2 - n^2$
3. حدد جميع الأزواج $(m,n)$ من $\mathbb{N}^2$ التي تحقق $\begin{matrix} m^5 - n^5 \equiv 0[10] \\ m^2 - n^2 \equiv 1940 \end{matrix}$

**تمرين29**

حدد $\left(2^{n+2} - 2^n\right) \wedge \left(3^{n+2} - 3^n\right) \qquad n \in \mathbb{N}$

**تمرين30**

بين أن $\forall n \in \mathbb{Z}\ \ 169 \not| n^2 + 20n + 74$

**تمرين31**

1. حدد علاقة بين $C_{2n}^n$ و $C_{2n}^{n+1}$
2. استنتج أن $n+1/C_{2n}^n$

**تمرين32**

بين أن $\forall n \in \mathbb{N} \qquad \left(2^n + 3^n\right) \wedge \left(2^{n+1} + 3^{n+1}\right) = 1$

**تمرين33**

بين أن $\frac{21n-3}{4}$ و $\frac{15n+2}{4}$ لا يمكن أن يكونا صحيحين في نفس الوقت مع $n \in \mathbb{Z}$

**تمرين34**