**تمرين1 :**

نزود $G=\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}$ بالقانون التالي: $(x,y)*(x',y')=(xx',xy'+\frac{y}{x'})$

1. بين أن $(G,*)$ زمرة
2. هل هي تبادلية ؟
3. بين أن $\{0\}\times\mathbb{R}^*$ و $\{1\}\times\mathbb{R}$ و $\mathbb{Q}^*\times\mathbb{Q}$ زمر جزئية ل $(G,*)$
4. بين أن $H=\left\{\left(x,x-\frac{1}{x}\right)/\,x\in\mathbb{R}^*\right\}$ زمرة جزئية تبادلية ل $(G,*)$.

**تمرين2:**

لتكن $(G,.)$زمرة بحيث $\forall x\in G: x^3=e$

1. حدد $x^{-1}$
2. بين أن

$$\forall(x,y)\in G^2:(xy)^2=y^2x^2\ ;\ xy^2x=yx^2y\ ;\ x^2yx^2=y^2xy^2$$

**تمرين3:**

أدرس القانون التالي: $a,b\in\mathbb{R}\ \ a\perp b=ab-a-b+2$

**تمرين4:**

أدرس القانون التالي: $(x,y),(x',y')\in\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}:\ (x,y)\perp(x',y')=(xx',xy'+yx'^3)$

**تمرين5:**

نزود $\mathbb{R}^2$ بالقانون التالي: $x,x',y,y'\in\mathbb{R}\ \ (x,y)\perp(x',y')=(x+x',ye^{x'}+y'e^{-x})$

1. بين أن $(\mathbb{R}^2,\perp)$ زمرة
2. هل هي تبادلية ؟
3. نعتبر $H=\{(x,f(x))/\,x\in\mathbb{R}\}$ بين أن $H$ زمرة جزئية ل $(\mathbb{R}^2,\perp)$

**تمرين6:**

نزود $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*$ بالقانون التالي: $x,x',y,y'\in\mathbb{R}\ \ (x,y)*(x',y')=(xx',xy'+y)$

1. بين أن $(\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*,*)$ زمرة
2. هل هي تبادلية ؟

**تمرين7:**

لتكن $(G,.)$زمرة و $a$ و $b$ من $G$ بحيث $\begin{cases}a^{-1}ba=b^{-1}\\ b^{-1}ab=a^{-1}\end{cases}$

1. بين أن : $bab=a$ و $aba=b$
2. بين أن $ab=b^3a$ و $a=b^4a$
3. استنتج أن : $b^4=e$ و $a^4=e$

**تمرين8:**

نزود $\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}$ بالقانون التالي: $x,x',y,y'\in\mathbb{R}\ \ (x,y)*(x',y')=(xx',xy'+yx'^n)$ مع $n\in\mathbb{N}^*$

1. بين أن $(\mathbb{R}^*\times\mathbb{R},*)$ زمرة
2. هل هي تبادلية ؟

**تمرين9:**

نعتبر المجموعة التالية $A=\left\{a+b\sqrt{2}/(a,b)\in\mathbb{Z}^2\right\}$

1. بين أن $A$ جزء مستقر بالنسبة للجسم $(\mathbb{R},+,\times)$
2. بين أن $(A,+,\times)$ حلقة تبادلية وواحدية. هل هي كاملة؟
3. ليكن التطبيق التالي $\begin{array}{l}\varphi: A \to A \\ a+b\sqrt{2}\mapsto a-b\sqrt{2}\end{array}$

بين أن $\varphi$ تشاكل تقابلي من $(A,+,\times)$ نحو $(A,+,\times)$

4. لكل $x=a+b\sqrt{2}$ من $A$ نضع $\|x\|=a^2-2b^2$.بين أن $x$ يقبل مقلوبا اذا وفقط اذا كان $\|x\|=1$ أو $\|x\|=-1$

**تمرين10:**

نعتبرالقانون التالي: $a,b\in\mathbb{R}\quad a*b=a\sqrt{1+b^2}+b\sqrt{1+a^2}$

1. بين أن $sh$ تشاكل تقابلي من $(\mathbb{R},+)$ نحو $(\mathbb{R},*)$
2. استنتج بنية $(\mathbb{R},*)$

**تمرين11:**

نعتبر المجموعة التالية: $E=\left\{xA+yB/(x,y)\in\mathbb{R}^2\right\}$ مع $A=\begin{pmatrix}-1&0&1\\1&-1&0\\0&1&-1\end{pmatrix}$ و $B=\begin{pmatrix}-1&1&0\\0&-1&1\\1&0&-1\end{pmatrix}$

1. بين أن $(E,+,.)$فضاء متجهي حقيقي محددا بعده
2. احسب $A^2$ و $B^2$ و $AB$و $BA$
3. بين أن $E$جزء مستقر بالنسبة ل $(M_3(\mathbb{R}),\times)$
4. بين أن $(E,+,.)$ جسم تبادلي

**تمرين12:**

نعتبر المجموعة التالية: $E=\left\{xI+yA+zB/(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\right\}$ مع $A=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$ و $B=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}$

1. بين أن $(E,+,.)$فضاء متجهي حقيقي محددا بعده
2. احسب $A^2$ و $B^2$ و $AB$و $BA$
3. أحسب $B^3$ بدلالة $I$ و $A$و $B$
4. بين أن $(E,+,.)$ حلقة تبادلية و واحدية
5. هل هي جسم ؟

**تمرين13:**

$$E=\left\{\begin{pmatrix}x&y&z\\2z&x&y\\2y&2z&x\end{pmatrix}/(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\right\}$$

1. بين أن $(E,+,.)$فضاء متجهي حقيقي محددا بعده
2. بين أن $(E,+,\times)$ حلقة تبادلية وواحدية

**تمرين14:** *Anneau de Gauss*

نضع $\mathbb{Z}[i]=\left\{a+bi/(a,b)\in\mathbb{Z}^2\right\}$

1. بين أن $\mathbb{Z}[i]$ حلقة تبادلية و واحدية
2. لكل $z=a+bi$ من $\mathbb{Z}[i]$ نضع $N(z)=a^2+b^2$
أ. بين أن $\forall (z,z')\in \mathbb{Z}[i]^2 \quad N(zz')=N(z)N(z')$
ب. بين أن $z$ يقبل مقلوبا في $\mathbb{Z}[i]$ $\Leftrightarrow N(z)=1$
ت. استنتج العناصر التي تقبل مقلوبا في $\mathbb{Z}[i]$
3. نضع $\mathrm{K}=\{a+bi/(a,b)\in\mathbb{Q}^2\}$ . بين أن $(\mathrm{K},+,\times)$ جسم تبادلي
4. نضع $\Sigma=\{a^2+b^2/(a,b)\in\mathbb{Z}^2\}$ . بين أن $\Sigma$ جزء مستقر بالنسبة $(\mathbb{N},\times)$

**تمرين15:** *Anneaux de Boole*

نقول عن حلقة $(A,+,\times)$ أنها حلقة *Boole* اذا كان $\forall x\in \mathrm{A}\ x^2=x$

ليكن $(A,+,\times)$ حلقة *Boole*

1. بين أن $\forall x\in \mathrm{A}\ x+x=0$
2. بين أن $(A,+,\times)$ حلقة تبادلية
3. بين أن $\forall (x,y)\in \mathrm{A}^2 \quad xy(x+y)=0$
4. بين أنه اذا كانت $(A,+,\times)$ كاملة فان A منتهية و $card(\mathrm{A})=2$
5. مثال : $(\mathrm{P}(\mathrm{E}),\Delta,\cap)$

**تمرين16:** *Elements nilpotents*

لتكن $(A,+,\times)$ حلقة .نقول عن $x\in \mathrm{A}$ أنه متعدم اذا وجد $n\in\mathbb{N}^*$ بحيث $x^n=0$

1. بين أن $x$ متعدم $\Leftarrow 1-x$ يقبل مقلوبا
2. بين أن $x$ متعدم $\Leftarrow x$ قاسم للصفر
3. ليكن $x$ و $y$ عنصران متعدمان و يتبادلان .بين أن $xy$ و $x+y$ و $x-y$ متعدمة
4. حدد العناصر المتعدمة في $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$

**تمرين17:**

لتكن $(A,+,\times)$ حلقة تبادلية وواحدية .نضع $B=\{x\in \mathrm{A}/x^2=x\}$

1. بين أن $x\in B\Leftarrow 1-x\in B$
2. نزود B بالقانون التالي $x*y=x+y-2xy$ . بين أن $(\mathrm{B},*,\times)$ حلقة تبادلية وواحدية

**تمرين18**:

$$\mathrm{A}=\left\{M(a,b)=\begin{pmatrix}a & b\\ b & a\end{pmatrix}/(a,b)\in\mathbb{Z}^2\right\}$$

1. بين أن $(\mathrm{A},+,\times)$ حلقة واحدية
2. هل هي تبادلية؟
3. حدد قواسم الصفر

**تمرين19:**

ليكن $(\mathrm{K},+,\times)$ جسم. و $a\in \mathrm{K}$ .بسط العبارة التالية $\mathrm{P}=(1+a)(1+a^2)(1+a^4).....(1+a^{2^n})$

**تمرين20:**

$$\mathrm{A}=\left\{M(a,b)=\begin{pmatrix}a & b\\ -b & a\end{pmatrix}/(a,b)\in\mathbb{R}^2\right\}$$

1. بين أن $(\mathrm{A},+,.)$ فضاء متجهي حقيقي
2. نعتبر التطبيق التالي $\varphi:\begin{array}{ccc}\mathbb{C} & \to & \mathrm{A}\\ z=a+ib & \mapsto & M(a,b)\end{array}$ بين أن $\varphi$ تشاكل تقابلي من $(\mathbb{C},+,\times)$ نحو $(\mathrm{A},+,\times)$
3. استنتج بنية $(\mathrm{A},+,\times)$

**تمرين21:**

بين أن $H$ زمرة جزئية ل $(\mathbb{Z},+)$ $\Leftrightarrow$ $(\exists n\in\mathbb{N}^*)\quad H=n\mathbb{Z}$

**تمرين22:**

1. بين أن تقاطع زمرتين جزئيتين هي زمرة جزئية
2. هل الخاصية صالحة بالنسبة للاتحاد؟

**تمرين23:**

لتكن $(G,.)$ زمرة و $H$ و $\mathrm{K}$ زمرتان جزئيتان ل $(G,.)$

بين أن $H\cup\mathrm{K}$ زمرة جزئية ل $(G,.)$ $\Leftrightarrow$ $H\subset\mathrm{K}$ او $\mathrm{K}\subset H$

**تمرين24:**

لتكن $(G,.)$ زمرة و $H$ و $\mathrm{K}$ زمرتان جزئيتان ل $(G,.)$

نعتبر المجموعة التالية : $H\mathrm{K}=\{hk/(h,k)\in H\times\mathrm{K}\}$

بين أن $H\mathrm{K}$ زمرة جزئية ل $(G,.)$ $\Leftrightarrow$ $H\mathrm{K}=\mathrm{K}H$

**تمرين25:**

1. بين أن $U_n$ زمرة جزئية ل $(\mathbb{C}^*,\times)$
2. بين أن $U$ زمرة جزئية ل $(\mathbb{C}^*,\times)$

**تمرين26:**

لتكن $(G,*)$ مجموعة مزودة بقانون تركيب داخلي تجميعي بحيث كل عنصر فهو منتظم. لكن $a\in G$

نعتبر التطبيقين $\gamma_a:\begin{array}{ccc}G & \to & G\\ x & \mapsto & a*x\end{array}$ و $\delta_a:\begin{array}{ccc}G & \to & G\\ x & \mapsto & x*a\end{array}$

1. بين أن $\gamma_a$ تباييني
2. استنتج أنه تقابلي
3. استنتج أن $a$ يقبل مماثلا على اليمين
4. بين أن $a$ يقبل مماثلا على اليسار
5. أختم

**تمرين27:**

نزود $\mathbb{R}^2$ بالقانون التالي: $(x,y)*(x',y')=(x+x'+xx',y+y')$

نعتبر المجموعة التالية $G=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/x\neq-1\}$

1. بين أن $G$ جزء مستقر بالنسبة ل $(\mathbb{R}^2,*)$
2. بين أن $(G,*)$ زمرة تبادلية
3. بين أن $H=\{(x,\ln(x+1))/x\succ-1\}$ زمرة جزئية ل $(G,*)$.

**تمرين28:**

لتكن $(G,.)$ زمرة و $a\in G$ و $f_a$ التطبيق المعرف ب $f_a:\begin{array}{ccc}G & \to & G\\ x & \mapsto & axa^{-1}\end{array}$ و $G'=\{f_a/a\in G\}$

1. بين أن $f_a$ تشاكل تقابلي من $G$ نحو $G$

2. حدد $f_a \circ f_b$
3. بين أن $(G', \circ)$ زمرة
4. أ. بين أن التطبيق $\begin{matrix} \varphi : G \to G' \\ a \mapsto f_a \end{matrix}$ تشاكل شمولي

ب. حدد $Ker\varphi$

**<u>تمرين29:</u>**

بين أن $\left\{ \frac{p}{2^n} / (p,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \right\}$ زمرة جزئية ل $(\mathbb{Q}, +)$