



الصفحة

1

4



الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
الدورة الإستراتيجية 2010
الموضوع

9	المعامل:	RS24	الرياضيات	المادة:
4	مدة الإنجاز:	5	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب)	الشعب (ة) أو المسلك:

- مدة إنجاز الموضوع هي أربع ساعات.
- يتكون الموضوع من ثلاثة تمارين و مسألة جميعها مستقلة فيما بينها .
- يمكن إنجاز التمارين حسب الترتيب الذي يرغب فيه المترشح.

- التمرين الأول يتعلق بالبنىات الجبرية.
- التمرين الثاني يتعلق بالأعداد العقدية.
- التمرين الثالث يتعلق بحساب الإحتمالات.
- المسألة تتعلق بالتحليل.

لا يسمح باستعمال الآلة الحاسبة القابلة للبرمجة

التمرين الأول: (3 نقط)

نذكر أن $(M_3(\mathbb{R}), +, \times)$ حلقة واحدة غير تبادلية.

$$E = \left\{ M(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ x^2 & 2x & 1 \end{pmatrix} / x \in \mathbb{R} \right\} : \text{نعتبر المجموعة :}$$

- (1) بين أن E جزء مستقر في $(M_3(\mathbb{R}), \times)$ 0.5
- (2) أ- بين أن التطبيق φ الذي يربط العدد الحقيقي x بالمصفوفة $M(x)$ تشاكل تقابلي من $(\mathbb{R}, +)$ نحو (E, \times) . 0.5
- ب- استنتج أن زمرة (E, \times) زمرة تبادلية. 0.5
- ج- حدد $M^{-1}(x)$ مقلوب المصفوفة $M(x)$ حيث x عدد حقيقي. 0.5
- د- حل في المجموعة E المعادلة $A^5 X = B$ حيث $A = M(2)$ و $B = M(12)$ و $A^5 = \underbrace{A \times A \times \dots \times A}_{5 \text{ مرات}}$ 0.5
- (3) بين أن المجموعة $F = \{M(\ln(x)) / x \in \mathbb{R}_+^*\}$ زمرة جزئية للزمرة (E, \times) . 0.5

التمرين الثاني: (4 نقط)

المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد و ممنظم و مباشر $(O; \bar{u}, \bar{v})$.

(1) نعتبر في المجموعة \mathbb{C} المعادلة $z^2 - 4iz - 2 + 2i\sqrt{3} = 0$ (E)

أ- تحقق أن العدد العقدي $a = 1 + i(2 - \sqrt{3})$ حل للمعادلة (E) 0.5

ب- استنتج b الحل الثاني للمعادلة (E) 0.5

(2) أ- بين أن $a^2 = 4(2 - \sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{6}}$ 0.5

ب- اكتب العدد a على الشكل المثلثي. 0.75

(3) نعتبر النقط A و B و C التي أحاقها على التوالي a و b و $c = 2i + 2e^{i\frac{\pi}{7}}$

لتكن (Γ) الدائرة التي أحد أقطارها $[AB]$

أ- حدد ω لحق النقطة Ω مركز الدائرة (Γ) 0.5

ب- بين أن النقطتين O و C تنتميان للدائرة (Γ) 0.5

ج- بين أن العدد العقدي $\frac{c-a}{c-b}$ تخيلي صرف. 0.75

التمرين الثالث: (3 نقط)

يحتوي صندوق على 10 كرات بيضاء و كرتين حمراوين .

نسحب الكرات من الصندوق الواحدة تلو الأخرى بدون إحلال إلى أن نحصل لأول مرة على كرة بيضاء ثم نوقف التجربة .

ليكن X المتغير العشوائي الذي يساوي عدد الكرات المسحوبة.

(1) أ- حدد مجموعة قيم المتغير العشوائي X 0.25

- ب- احسب احتمال الحدث $[X = 1]$ 0.5
- ج- بين أن: $p[X = 2] = \frac{5}{33}$ 0.5
- د- احسب احتمال الحدث $[X = 3]$ 0.5
- 2) أ- بين أن: $E(X) = \frac{13}{11}$. (حيث $E(X)$ هو الأمل الرياضي للمتغير العشوائي X) 0.5
- ب- احسب $E(X^2)$ ثم استنتج قيمة $V(X)$. (حيث $V(X)$ هي مغايرة المتغير العشوائي X) 0.75

مسألة: (10 نقط)

I- نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $I = [0, 1]$ بما يلي:

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{1 - \ln(1-x)} & ; \quad 0 \leq x < 1 \\ f(1) = 0 \end{cases}$$

و ليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- 1) بين أن الدالة f متصلة على اليسار في 1 0.5
- 2) أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليسار في 1 0.5
- 3) أدرس تغيرات الدالة f على المجال I ثم أعط جدول تغيراتها. 0.75
- 4) أ- بين أن المنحنى يقبل نقطة انعطاف وحيدة أفصولها $\frac{e-1}{e}$ 0.5
- ب- أنشئ المنحنى (C) مبرزا نصف مماسه في النقطة التي أفصولها 0 . (تأخذ $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2cm$) 0.75
- 5) بين أنه يوجد عدد حقيقي وحيد α من المجال I يحقق: $f(\alpha) = \alpha$ 0.5
- 6) أ- بين أن الدالة f تقابل من المجال I نحو I . 0.25
- ب- حدد $f^{-1}(x)$ لكل عنصر x من المجال I . 0.5

II- نضع: $I_0 = \int_0^1 f(t) dt$ و لكل عدد صحيح طبيعي غير منعدم n : $I_n = \int_0^1 t^n f(t) dt$

- 1) بين أن المتتالية $(I_n)_{n \geq 0}$ تناقصية ثم استنتج أنها متقاربة. 0.75
- 2) بين أن: $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$ ($\forall n \geq 0$) ثم حدد نهاية المتتالية $(I_n)_{n \geq 0}$. 0.75

III- لكل عدد حقيقي x من المجال $J = [0, 1]$ و لكل عدد صحيح طبيعي غير منعدم n نضع:

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{k=n} F_k(x) \text{ و } F(x) = \int_0^x \frac{f(t)}{1-t} dt \text{ و } F_n(x) = \int_0^x t^n f(t) dt \text{ و } F_0(x) = \int_0^x f(t) dt$$

- 1) بين أن: $(\forall n \in \mathbb{N}) (\forall x \in J) F(x) - S_n(x) = \int_0^x \frac{t^{n+1} f(t)}{(1-t)} dt$ 1

2) أ- بين أن الدالة : $x \rightarrow (1-x)(1-\ln(1-x))$ تناقصية قطاعا على المجال J 0.5

ب- استنتج أن الدالة : $t \rightarrow \frac{f(t)}{1-t}$ تزايدية قطاعا على المجال $[0, x]$ مهما يكن x من المجال J 0.5

3) أ- بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}) (\forall x \in J) : 0 \leq F(x) - S_n(x) \leq \frac{1}{n+2} \left(\frac{1}{1-x} \right)$ 1

ب- استنتج أنه مهما يكن العدد x من المجال J لدينا : $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x) = F(x)$ 0.5

4) أ- حدد $F(x)$ من أجل $x \in J$ 0.5

ب- حدد النهاية : $\lim_{x \rightarrow 1^-} F(x)$ 0.25