



C:RS24

المادة:	الرياضيات	المعامل:	9
الشعب(ة) أو المسلك:	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب)	مدة الإجازة:	4

يسمح استعمال الآلة الحاسبة

التمرين الأول : (3 نقط)

نذكر أن $(M_2(\mathbb{R}), +, \times)$ حلقة واحدة وحدتها المصفوفة $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ وأن $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ فضاء متجهي حقيقي .

لتكن V مجموعة المصفوفات $M_{(a,b)} = \begin{pmatrix} a & b \\ 4b & a \end{pmatrix}$ حيث $(a,b) \in \mathbb{R}^2$

1- بين أن V فضاء متجهي جزئي من $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ وحدد أساسا له . 0,75

2- بين أن V جزء مستقر من $(M_2(\mathbb{R}), \times)$ 0,25

ب) بين أن $(V, +, \times)$ حلقة واحدة تبادلية . 0,5

3- احسب $M_{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}} \times M_{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}}$ 0,25

ب) هل الحلقة $(V, +, \times)$ جسم؟ 0,25

4- لتكن X مصفوفة من V حيث $X = \begin{pmatrix} a & b \\ 4b & a \end{pmatrix}$ مع $(a,b) \in \mathbb{R}^2$

أ) بين أن $X^2 - 2aX + (a^2 - 4b^2)I = O$ حيث O هي المصفوفة المنعدمة . 0,5

ب) نفترض أن $a^2 - 4b^2 \neq 0$ 0,5

بين أن المصفوفة X تقبل مقلوبا في V ينبغي تحديده.

التمرين الثاني : (4 نقط)

ليكن u عددا عقديا يخالف $(1-i)$

1) أ - أشر $(iu-1-i)^2$ 0,25

ب - حل في مجموعة الأعداد العقدية \mathbb{C} المعادلة ذات المجهول z : 0,75

$$z^2 - 2(u+1-i)z + 2u^2 - 4i = 0$$

2) المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم ومباشر.

نعتبر النقط $A((1+i)u-2i)$ و $B((1-i)u+2)$ و $U(u)$ و $\Omega(2-2i)$

أ - حدد لحق النقطة I منتصف القطعة $[AB]$ ثم حدد متجهة الإزاحة t التي تحول النقطة U إلى النقطة I 0,5

ب - ليكن R الدوران الذي مركزه Ω وزاويته $-\frac{\pi}{2}$. بين أن $R(A) = B$ 0,5

ج - استنتج أن (ΩI) و (AB) متعامدان. 0,5

د - انطلاقا من النقطة U وضح طريقة لإنشاء النقطتين A و B 0,75

(3) نضع $u = a(1+i) - 2i$ حيث $a \in \mathbb{R}$

(أ) حدد لحقي المتجهتين \overline{AB} و \overline{AU} بدلالة a 0,5

(ب) استنتج أن النقط A و B و U مستقيمية. 0,25

التمرين الثالث : (3 نقط)

n عدد صحيح طبيعي أكبر أو يساوي 4 .

لدينا ثلاث صناديق U_1 و U_2 و U_3 .

الصندوق U_1 يحتوي على كرة حمراء واحدة و $(n-1)$ كرة سوداء.

الصندوق U_2 يحتوي على كرتين حمراوين و $(n-2)$ كرة سوداء.

الصندوق U_3 يحتوي على ثلاث كرات حمراء و $(n-3)$ كرة سوداء.

نعتبر التجربة العشوائية التالية: نختار عشوائيا صندوقا من بين الصناديق الثلاثة ثم نسحب تانيا كرتين من الصندوق الذي وقع عليه الاختيار.

ليكن X المتغير العشوائي الحقيقي الذي يساوي عدد الكرات الحمراء المسحوبة.

1- حدد قيم المتغير العشوائي X 0,25

2- (أ) بين أن احتمال الحدث $(X=2)$ يساوي $\frac{8}{3n(n-1)}$ 0,75

(ب) بين أن احتمال الحدث $(X=1)$ يساوي $\frac{4(3n-7)}{3n(n-1)}$ 0,75

(ج) استنتج قانون احتمال المتغير العشوائي X 0,5

3- علما أننا حصلنا على كرتين حمراوين، ما هو احتمال أن يكون السحب قد تم من الصندوق U_3 ؟ 0,75

مسألة: (10 نقط)

I - نعتبر الدالة العددية g للمتغير الحقيقي x المعرفة على \mathbb{R}^+ بما يلي : $g(x) = 2(1 - e^{-x}) - x$

(1) أ - ادرس تغيرات الدالة g 0,5

ب - ضع جدول تغيرات الدالة g 0,5

(2) أ - بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $[\ln 4, \ln 6]$ 0,5

(نأخذ $\ln 2 \approx 0,7$ و $\ln 3 \approx 1,1$)

ب - ادرس إشارة $g(x)$ على \mathbb{R}^+ 0,5

(3) نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي : $u_0 = 1$ و $u_{n+1} = 2(1 - e^{-u_n})$ لكل n من \mathbb{N}

أ - بين أن $1 \leq u_n < \alpha$ لكل n من \mathbb{N} 0,5

ب - بين أن $u_{n+1} - u_n = g(u_n)$ لكل n من \mathbb{N} 0,25

ج - بين أن المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ تزايدية قطعا . 0,25

د - بين أن المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ متقاربة ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ 0,5

II - نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة على \mathbb{R}_+^* بما يلي : $f(x) = \frac{1-e^x}{x^2}$
 و ليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم (O, \vec{i}, \vec{j})

(1) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ 1

(2) أ - تحقق أن : $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha(\alpha-2)}$ 0,5

ب - بين أن $f'(x) = \frac{e^x g(x)}{x^3}$ لكل x من \mathbb{R}_+^* ثم ضع جدول تغيرات الدالة f 0,75

(3) أنشئ (C) (ناخذ $\alpha \approx 1,5$) 0,5

III - نعتبر الدالة العددية F للمتغير الحقيقي x المعرفة على $[0, +\infty[$ بما يلي :

$$(\forall x > 0) \quad F(x) = \int_x^{2x} \frac{1-e^t}{t^2} dt \quad \text{و} \quad F(0) = -\ln 2$$

(1) أ - باستعمال مكاملة بالأجزاء , بين أن : $(\forall x > 0) \quad F(x) = \frac{e^{2x}-1}{2x} - \frac{e^x-1}{x} - \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt$ 0,5

ب - بين أن لكل x من $]0, +\infty[$: $e^x \ln 2 \leq \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt \leq e^{2x} \ln 2$ 0,5

ج - احسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt$ ثم استنتج أن الدالة F متصلة على اليمين في الصفر . 0,5

(2) أ - بين أن لكل x من $]0, +\infty[$: $F(x) \leq \frac{1-e^x}{2x}$ 0,25

ب - احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ 0,25

(3) بين أن F قابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[$ و أن : $(\forall x > 0) \quad F'(x) = -\frac{1}{2} \left(\frac{e^x-1}{x} \right)^2$ 0,5

(4) أ- ليكن x من المجال $]0, +\infty[$.

بين أنه يوجد c من المجال $]0, x[$ بحيث: $F(x) - F(0) = -\frac{1}{2}xe^{2c}$ (يمكنك استعمال مبرهنة

0,75

التزايدات المنتهية مرتين)

ب - أثبت أن لكل x من $]0, +\infty[$: $-\frac{1}{2}e^{2x} \leq \frac{F(x) - F(0)}{x} \leq -\frac{1}{2}$ 0,25

ج- استنتج أن F قابلة للاشتقاق على اليمين في الصفر و أن $F'_d(0) = -\frac{1}{2}$ 0,25