Centre Ibn Abdoune **10/06/2008**
Classes Préparatoires **MPSI 1**
Khouribga **ELOUADIH**

Série 22 : Courbes planes

Exercice 1.
Construire les courbes paramétréessuivantes :

1. Astroide $\begin{cases} x(t) = acos^3(t) \\ y(t) = asin^3(t) \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$ et $a > 0$
2. folium de Descartes $\begin{cases} x(t) = \frac{3at}{1+t^3} \\ y(t) = \frac{3at^2}{1+t^3} \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$ et $a > 0$
3. courbes de Lissajous $\begin{cases} x(t) = sin(2t) \\ y(t) = sin(3t) \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$
4. cycloide $\begin{cases} x(t) = a(t - sin(t)) \\ y(t) = a(1 - cos(t)) \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$ et $a > 0$
5. $\begin{cases} x(t) = \frac{\sqrt{2}}{4}cos(2t) - cos(t) \\ y(t) = \frac{1}{4}sin(2t) \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$
6. $\begin{cases} x(t) = \frac{2t}{1-t^2} \\ y(t) = \frac{t^2}{1-t^2} \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$ et $a > 0$

Exercice 2.
Soit (Γ) l'arc paramétré définie par $\begin{cases} x(t) = \frac{t^3}{t^2-1} \\ y(t) = \frac{t^4-t^2+1}{t^2-1} \end{cases}$

1. Montrer que M(0) est un point stationnaire.dessiner sa nature
2. Montrer que (Γ) admet un axe de symétrie et déterminer son domaine détude
3. Détermine les asymptotes à (Γ) et la position de (Γ) par rapport aux asymptotes
4. Dresser le tableau de variations et tracer (Γ)

Exercice 3.
Déterminer une droite qui soit à la fois tangente et normale(cad perpendiculaire à une tangente) à (Γ) l'arc paramétré définie par $\begin{cases} x(t) = 3t^2 \\ y(t) = 2t^3 \end{cases}$

Exercice 4.
Soit (Γ) l'arc paramétré définie par $\begin{cases} x(t) = t^3 - at \\ y(t) = t^2 - bt \end{cases}$

1. déterminer l'ensemble des couples (a,b)tels que (Γ) ait un point double dont on précisera ses coordonnées
2. déterminer alors l'ensemble des couples (a,b)tels que les tangentes au point double soient perpendiculaires
3. Quel est l'ensemble des poits doubles ? Le tracer

Exercice 5.
Etudier et représenter les courbes planes de représentations polaires :

1. $\rho = \frac{sin(\theta)}{cos(\theta)-1}$
2. $\rho = 4cos(\theta)cos(2\theta)$
3. $\rho^2 = a^2cos(2\theta)$ Lemniscate de Bernouili
4. $\rho = sin(\frac{2\theta}{3})$
5. $\rho = cos(3\theta)$

Exercice 6.
Rayon de courbure au point $\theta = 0$ de la courbe déquation polaire $\rho = 1 + 2\frac{\theta}{2}$;$\rho = 2a\frac{sin(3\theta)}{sin(2\theta)}$

Exercice 7.
Longueur totale de (Γ) l'arc paramétré définie par $\begin{cases} x(t) = a(3cos(t) - cos(3t)) \\ y(t) = a(3sin(t) - sin(3t)) \end{cases}$

Exercice 8.
Rayon de courbure en fonction de ρ de la courbe déquation polaire $\rho = \frac{2acos(\theta)}{3}$

Exercice 9.
Réctification et longeur de :

1. Astroide $\begin{cases} x(t) = acos^3(t) \\ y(t) = asin^3(t) \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$ et $a > 0$
2. cycloide $\begin{cases} x(t) = a(t - sin(t)) \\ y(t) = a(1 - cos(t)) \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$ et $a > 0$
3. la cardoide $\rho = a(1 + cos(\theta))$