Centre Ibn Abdoune
Classes Préparatoires
Khouribga

03/06/2008
MPSI 1
ELOUADIH

Série 21 : Fonctions de deux variables

Exercice 1.
Représenter les parties de $\mathbb{R}^2$ et dire si elles sont des ouverts ou des fermés

1. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x > 0\}$
2. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / (x+y)(1-xy) > 0\}$
3. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq y^2 et y \geq x^2\}$

Exercice 2.

1. Etudier la continuité à l'origine des fonctions définies de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par :
   (a) $f(x,y) = xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ et $f(0,0) = 0$
   (b) $g(x,y) = \frac{xsin(y)-ysin(x)}{x^2+y^2}$ et $g(0,0) = 0$
2. calculer leur dérivées partielles d'ordres 1 et 2 en (0,0)
3. Sont-elles de classes C^1?C^2?

Exercice 3.
Etant donnée une fonction $H \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$,étudier la continuité de la fonction définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par :$f(x,y) = \frac{H(x)-H(y)}{x-y}$ et $f(x,x) = H'(x)$

Exercice 4.
Déterminer les extrmemums de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

1. $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$
2. $f(x,y) = 2x + y - x^4 - y^4$
3. $f(x,y) = xe^y + ye^x$

Exercice 5.
Résoudre les équations differentielles suivantes :

1. $(x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y})f + x^2 + y^2 = 0$ (coordonnées polaires)
2. $x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ (coordonnées polaires)
3. $2xy\frac{\partial f}{\partial x} + (1+y^2)\frac{\partial f}{\partial y} = 0 (poser x = \frac{u^2+v^2}{2}, y = \frac{u}{v})$

Exercice 6. ***Intégrale de Gauss***
on pose $G = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt$
on note C(R)le cercle de centre O et de rayon R.P(R) le pavé $[-R,R]^2 (R > 0)$
on considére les intégrales suivantes :
$I(R) = \int\int_{C(R)} e^{-x^2-y^2} dxdy$ et $J(R) = \int\int_{P(R)} e^{-x^2-y^2} dxdy.$

1. Exprimer I(R) en fonction de R et J(R) en fonction de $\int\limits_{-R}^{R} e^{-t^2} dt$
2. Comparer $I(R), J(R)$ et $I(R\sqrt{2})$

3. En déduire la valeur de G par passage à la limite

Exercice 7.
Calculer $\int\int_D \frac{xdxdy}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$ où $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y^2 \leq 2x \text{ et } 0 \leq x \leq 2\}$

Exercice 8.
Calculer $\int\int_D x^2 dxdy$ où D est l'intérieur de l'éllipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$