Centre Ibn Abdoune **29/04/2008**
Classes Préparatoires **MPSI 1**
Khouribga **ELOUADIH**

Série 20 : Espaces Euclidiens

Exercice 1.
Montrer les inégalités suivantes :

1. $\sum\limits_{k=1}^{n} k\sqrt{k} \leq \frac{\sqrt{3}}{6}n(n+1)\sqrt{2n+1}$
2. $\sum\limits_{k=1}^{n-1} \frac{k}{(n-k)^2} \geq \frac{2}{n(n-1)}(\sum\limits_{k=1}^{n-1} \frac{k}{n-k})^2$

Exercice 2.
Déterminer :

1. $inf_{a,b,c\in\mathbb{R}} \int\limits_{-1}^{1} (x^4 - ax^2 - bx - c)^2 dx$
2. $inf_{a,b\in\mathbb{R}} \int\limits_{0}^{\pi} (x^2 - ax - b)^2 sin(x) dx$
3. $inf_{a,b,c\in\mathbb{R}} \int\limits_{0}^{+\infty} (x^3 - ax^2 - bx - c)^2 e^{-x} dx$

Exercice 3.
Soit E un espace euclidien rapporté à une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, e_2, ..., e_n)$ et p un projecteur de E .Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

1. p est orthogonal
2. $mat(p, \mathcal{B})$ est symétrique
3. $(\forall x \in E)\langle p(x) \mid x\rangle \geq 0$

Application : Caractériser l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $A = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 4.
On munit $\mathbb{R}^4$ de sa structure euclidienne canonique .Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ sa base canonique et $F = vect(e_1 + e_2, e_2 + e_3)$

1. Déterminer l'expression analytique de la projection orthgonale sur F et sur $F^{\perp}$ dans$\mathcal{B}$
2. Calculer $d(x, F)$ pour $x \in E$
3. Déterminer l'expression analytique de la symétrie orthgonale par rapport à F dans$\mathcal{B}$

Exercice 5.
diagonaliser $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,la matrice de passage étant orthogonale de determinant 1

Exercice 6.
Soit E un espace euclidien et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, ..., e_n)$une famille de n vecteurs unitaires tels que $(\forall x \in E) \sum\limits_{k=1}^{n} (\langle x|e_k\rangle)^2 = \|x\|^2$

1. Montrer que $\mathcal{B}$ est une famille orthonormée
2. Montrer que $E = vect(\mathcal{B})$
3. En déduire que $\mathcal{B}$ est une b.o.n de E

Exercice 7.
Soit E un espace euclidien et $f : E \longrightarrow E$ une application

1. Montrer que si f conserve le produit scalaire alors f est linéaire
2. Montrer que si $(\forall(x, y) \in E^2)\langle f(x)|y\rangle = \langle x|f(y)\rangle$ alors f est linéaire

Exercice 8.
Soit E un espace euclidien et $f : E \longrightarrow E$ une application . Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $(\forall x \in E)\langle f(x)|x\rangle = 0$ et f linéaire
2. $(\forall(x, y) \in E^2)\langle f(x)|y\rangle = -\langle x|f(y)\rangle$

f est dite antisymétrique dans ce cas

Exercice 9.
Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.Montrer que :

$$|\sum_{i,j} a_{ij}| \leq n$$

Exercice 10.
Montrer que les valeurs propres d'une matrice orthogonale réelle ou complexe ont pour module 1

Exercice 11.
Soit E un espace euclidien de dimension n.

1. Soit H un hyperplan de E .Montrer que $(\exists x_0 \in E - \{0_E\})H = (\mathbb{R}x_0)^\perp$
   et que $(\forall x \in E)s_H(x) = x - 2\frac{\langle x|x_0\rangle}{\|x_0\|^2}x_0$
2. Soient a et b de E tels que $\|a\| = \|b\|$.Montrer qu'il existe unique hyperplan H tel que $s_H(a) = b$

Exercice 12.
Soit E un espace euclidien de dimension 3 rapporté à une base o.n$\mathcal{B}(i, j, k)$.Déterminer la droite symétrique de vect(k) par rapport au plan d'equation $2x - 3y + z = 0$

Exercice 13.
$\mathbb{R}^3$ est munie de sa structure euclidienne canonique et rapportée à sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ considérée directe.Montrer que l'endomorphosme f de $\mathbb{R}^3$ est une rotation dont on précisera l'axe et l'angle sachant que f est canoniquement associé à :
$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;${}^tA$; $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $C = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & 1 & -4 \\ -4 & 4 & -7 \\ 1 & 8 & 4 \end{pmatrix}$;
$D = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$; $E = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2 & \sqrt{6} & \sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & 1 & 3 \\ \sqrt{6} & 3 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 14.
Soit E un espace euclidien de dimension 3 orienté par une base o.n.d $\mathcal{B}(i, j, k)$.Etudier l'endomorphisme de E dont la matrice dans cette base est :
$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$; $B = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$; $C = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

Exercice 15.
Soit E un $\mathbb{R}e.v$ et f une forme bilinéaire symétrique sur E.Montrer que f est entierement déterminée par $q(x) = f(x,x)$. q est dite la forme quadratique associé à f

Exercice 16.
Soit E un espace euclidien et F et G deux s.e.v de E.

1. Montrer que $(F+G)^{\perp} = F^{\perp} \cap G^{\perp}$
2. Montrer que $(F \cap G)^{\perp} = F^{\perp} + G^{\perp}$

Exercice 17.
$\mathbb{R}^3$ étant muni du produit scalaire usuel.Soit F le s.e.v défini par les équations
$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + y + 2z = 0 \end{cases}$$

1. Déterminer $F^{\perp}$
2. Déterminer la matrice de la symétrie orthogonale par rapport à F dans la base canonique.