Centre Ibn Abdoune **29/04/2008**
Classes Préparatoires **MPSI 1**
Khouribga **ELOUADIH**

Série 19 : Equations différentielles

Exercice 1.
Intégrer les équations différentielles suivantes :

1. $y' + 2y = x^2 - 2x + 3$
2. $xln(x)y' - y = -\frac{1}{x}(lnx + 1)$
3. $(1 + x)y' + y = 1 + ln(x + 1)$
4. $(1 - x)y' + y = \frac{x-1}{x}$
5. $y' + y = \frac{1}{1+e^x}$
6. $y'sin(x) - ycos(x) + 1 = 0$
7. $2xy' + y = x^n$. avec $n \in \mathbb{N}$

Exercice 2.
Soit f une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe au plus une application g de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ telle que : $(\forall x \in \mathbb{R}) g(x) = \int_0^x (x - t)g(t)dt + f(x)$.
Résoudre le cas $f(x) = cos(x)$

Exercice 3.
Intégrer les équations différentielles suivantes :

1. $y" + y' - 6y = 1 - 8x - 30x^2$
2. $y" + y' = 3 + 2x$
3. $y" + 4y = 4 + 2x - 8x^2 - 4x^3$
4. $y" + 3y' + 2y = e^x$
5. $y" + 3y' + 2y = e^{-x}$
6. $y" + 2y' + y = 2e^{-x}$
7. $y" + 4y' + 4y = (-14 + 16x + 16x^2)e^{2x}$
8. $y" - 3y' + 2y = (-3x^2 + 10x - 7)e^x$
9. $y" - 4y' + 4y = xch(2x)$
10. $y" + y' - 2y = 8sin(2x)$
11. $y" - 2y' + 5y = -4e^{-x}cos(x) + 7e^{-x}sin(x) - 4e^x sin(2x)$

Exercice 4.
Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$,périodique et non constante.Montrer qu'il ne peut exister deux fonctions périodiques solutions de l'équation $y" + 2y' + 2y = f(x)$

Exercice 5.
Intégrer l'équation différentielle suivante :$(1 + x)^2 y" + (1 + x)y' - 2 = 0$

Exercice 6.
Soit q une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ telle que :
$(\exists A > 0)(\forall x \geq A) q(x) > 0, q'(x) > 0$.
Montrer que toute solution de $y" + q(x)y = 0$ est bornée au voisinage de $+\infty$
on pourra utiliser la fonction définie sur $[A, +\infty[$ par $z(x) = y^2(x) + \frac{y'^2(x)}{q(x)}$

Exercice 7.
Soit $E = C^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$et U l'endomorphisme de E définie par $U(f) = f' - 2xf$.
Soit $n \in \mathbb{N}$,déterminer le noyau de U^n

Exercice 8.
Intégrer l'équation différentielle suivante :$x^2 + y^2 - 2xyy' = 0$

Exercice 9.
Intégrer l'équation différentielle suivante :$xy" + 2(1 + x)y' + (x + 2)y = 0$
(poser $z = xy$)

Exercice 10.
On considére l'équation différentielle suivante :$(E)(1 - x^2)y" - xy' + y = 0$

1. intégrer (E) sur $]-1, 1[$ en posant $x = sin(t)$
2. intégrer (E) sur $]1, +\infty[$ et sur $]-\infty, -1[$
3. intégrer (E) sur $\mathbb{R}$

Exercice 11.
Soit f une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{x \to +\infty} (f'(x) + f(x)) = 0$.
Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

Exercice 12. ***Equations d'Euler***
On considére l'équation différentielle suivante
$(E) : ax^2y" + bxy' + cy = 0$ avec $(a, b, c) \in (\mathbb{R}^*)^3$

1. en posant $z(t) = y(e^t)$,montrer que z vérifie une équation linéaire du second ordre à coéfficients constants
2. Quelle est la forme des solutions sur $\mathbb{R}_+^*$?
3. Quelle est la forme des solutions sur $\mathbb{R}_-^*$?

Exercice 13.
On considére l'équation différentielle suivante $(E) : x^2y" - 4xy' + 6y = 0$

1. chercher des fonctions puissances solutions de (E)
2. En déduire toutes les solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$;$\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}$
3. Quelle est la dimension de l'espace des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$?
4. mêmes questions pour l'équation différentielle : $2x^2y" - xy' + y = 0$

Exercice 14.
Intégrer $x^2y" - xy' + y = 0$

Exercice 15.
trouver toutes les fonctions deux dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que
$(\forall x \in \mathbb{R}) f(x + y) + f(x - y) = 2f(x)f(y)$

Exercice 16.
trouver toutes les fonctions de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ telles que
$(\forall x \in \mathbb{R}) f'(x) = f(\lambda - x)$

Exercice 17.
trouver toutes les fonctions de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$ telles que $(\forall x > 0) f'(x) = f(\frac{1}{x})$
(utiliser l'exercice 12)

Exercice 18.
Soit (E) l'équation différentielle :$xy' - y = -x^2e^x$

1. Résoudre (E) sur chacun des intervalles $I_1 =]0, +\infty[$ et $I_2 =]-\infty, 0[$
2. Résoudre (E) sur$\mathbb{R}$
3. Résoudre le probléme de Cauchy $\begin{cases} xy' - y = -x^2e^x \\ y(1) = -1 \end{cases}$