Centre Ibn Abdoune | **15/04/08**
Classes Préparatoires | **MPSI 1**
Khouribga | **ELOUADIH**

Série 18 : Déterminants et Groupe Symétrique

Exercice 1.

1. Montrer que $\mathcal{S}_n$ est engendré par les :
   (a) les transpositions $(1,i)$ $2 \leq i \leq n$
   (b) les transpositions $(i,i+1)$ $1 \leq i \leq n-1$
   (c) la transposition $(1,2)$ et le cycle $(1,2,...,n)$
2. Montrer que $\mathcal{A}_n$ est engendré par les 3-cycles pour $n \geq 3$

Exercice 2.
Décomposer la permutation suivante $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 7 & 6 & 9 & 1 & 3 & 8 & 4 & 10 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ en produits de cycles à supports deux à deux disjoints,déterminer son ordre et calculer σ^{2008}

Exercice 3.
Soit $c = (a_1, a_2, ..., a_p)$ un cycle d'ordre p dans $\mathcal{S}_n$ et $s \in \mathcal{S}_n$.Calculer $c' = scs^{-1}$.
On cherchera l'image par c' de $s(a_i)$

Exercice 4.
Soient τ_1 et τ_2 deux transpositions de $\mathcal{S}_n$.Montrer que l'on a nécessairement :
$\tau_1\tau_2 = id$ ou $(\tau_1\tau_2)^2 = id$ ou $(\tau_1\tau_2)^3 = id$

Exercice 5.
Déterminer le centre de $\mathcal{S}_n$

Exercice 6.
Calculer sous la forme la plus simple les déterminants suivants :
$\begin{vmatrix} 1 & a & 2a \\ a & 1 & a \\ 2a & 2a & 1 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+b & c+a & b+c \\ ab & ca & bc \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 1 & cosa & tan\frac{a}{2} \\ 1 & cosb & tan\frac{b}{2} \\ 1 & cosc & tan\frac{c}{2} \end{vmatrix}$ $(a+b+c = \pi)$

Exercice 7.
Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$ et $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{M}(\mathbb{C})$

1. calculer $det(M)$
2. calculer MU en fonction de $f(1), f(j), f(j^2)$ où $f(z) = a + bz + cz^2$
3. En déduire que $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a+bj+cj^2)(a+bj^2+cj)$

Exercice 8.
Soit $A = \begin{pmatrix} x & y & z & t \\ -y & x & -t & z \\ -z & t & x & -y \\ -t & -z & y & x \end{pmatrix}$.Calculer A^tA et en déduire la valeur de $det(A)$

Exercice 9.
Sachant que $6958, 16513$ et 10927 sont divisibles par 49,montrer que

$$\Delta = \begin{vmatrix} 6 & 95 & 8 \\ 16 & 51 & 3 \\ 10 & 92 & 7 \end{vmatrix} \text{ l'est aussi}$$

Exercice 10.
Soit $E = \{M(x, y) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})\}$
telle que $M(x, y) = (m_{i,j})$avec $m_{i,i} = x$ et $m_{i,j} = y$ pour $i \neq j$

1. Montrer que E est un sev de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,déterminer sa dimension
2. Montrer que E est un sous algébre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$
3. donner une condition nécéssaire et suffisante pour que $M(x, y)$ soit inversible
4. calculer $det(M(x, y))$

Exercice 11.
Calculer les déterminants des matrices suivantes :

1. $A_n = (\delta_{i,j} + a_i b_j) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$
2. $A_n = (|i - j|) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$
3. $A_n = (sup(i, j)) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Exercice 12.
Calculer

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & \alpha_n \\ \vdots & \swarrow & \swarrow & 0 \\ 0 & \swarrow & \swarrow & \vdots \\ \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} ; D_n = \begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \cdots & b & a \end{vmatrix} ; D_n = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & \cdots & a^{n-1} \\ a^{n-1} & \ddots & a & \cdots & a^{n-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a^2 & & \ddots & \ddots & a \\ a & \cdots & & a^{n-1} & 1 \end{vmatrix} ;$$

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ n & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 3 \\ 3 & & \ddots & \ddots & 2 \\ 2 & 3 & \cdots & n & 1 \end{vmatrix} ; D_n \begin{vmatrix} S_1 & S_1 & \cdots & \cdots & S_1 \\ S_1 & S_2 & S_2 & \cdots & S_2 \\ \vdots & S_2 & S_3 & \cdots & S_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ S_1 & S_2 & S_3 & & S_n \end{vmatrix} \text{avec } S_k = \sum_{k=1}^{k} i \, ;$$

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1 + b_1 & a_1 & a_1 & \cdots & a_1 \\ a_2 & a_2 + b_2 & a_2 & \cdots & a_2 \\ \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_n & \cdots & \cdots & a_n & a_n + b_n \end{vmatrix}$$

Exercice 13.
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\widetilde{A} =^t com(A)$

1. calculer $rg(\widetilde{A})$ si $rg(A) = n$
2. montrer que $rg(A) \leq n - 2 \Longrightarrow \widetilde{A} = 0$
3. On suppose que $rg(A) = n - 1$
   (a) montrer que $\mathcal{I}m(\widetilde{A}) \subset \mathcal{K}er(A)$
   (b) En déduire que $rg(\widetilde{A}) = 1$
4. on suppose que X est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ.Montrer que X est un vecteur propre de $\widetilde{A}$(distinguer les cas $\lambda = 0$ et $\lambda \neq 0$)

Exercice 14.

Déterminer le rang de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \\ 2 & 0 & 4 & -4 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

Exercice 15.

Inverser la matrice M en résolvant un systéme $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 & 2 & 1 \\ \vdots & & & & \ddots & 1 & 2 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 16.

Montrer que A est semblable à une matrice diagonale et déterminer A^n pour $n \in \mathbb{N}$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$;$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -8 \\ -4 & 7 & -4 \\ -8 & -4 & 1 \end{pmatrix}$;$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

Exercice 17.

Déterminer les suites u_n, v_n et w_n telles que :

$\begin{cases} u_{n+1} = 3u_n + v_n \\ v_{n+1} = u_n + 2v_n \end{cases}$;$\begin{cases} u_{n+1} = 2v_n - w_n \\ v_{n+1} = u_n - v_n \\ w_{n+1} = -u_n - v_n - w_n \end{cases}$;$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + w_n \\ v_{n+1} = u_n + v_n \\ w_{n+1} = v_n + w_n \end{cases}$

Exercice 18.

1. Calculer le déterminant de **VanderMonde**$D(a_1, a_2, ..., a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_0 & a_0^2 & \cdots & a_0^n \\ 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_{n-1} & a_{n-1}^2 & \cdots & a_{n-1}^n \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^n \end{vmatrix}$
2. calculer le déterminant réel ou complexe $D_n = \begin{vmatrix} a+b & a & 0 & \cdots & 0 \\ b & a+b & a & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & b & a+b & a \\ 0 & \cdots & 0 & b & a+b \end{vmatrix}$
3. calculer $\Delta_n = \begin{vmatrix} a & c & \cdots & c \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & c \\ b & \cdots & b & a \end{vmatrix}$
4. **déterminant circulant** :Soit $\omega = e^{i\frac{2\pi}{n}}$ et $(a_1, a_2, ..., a_n) \in \mathbb{C}^n$

   Soit $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_1 \end{pmatrix}$ et $\Omega = (\omega^{(i-1)(j-1)})_{1 \leq i,j \leq n}$

   calculer $det(A\Omega)$ et en déduire $det(A)$

Exercice 19.

Résoudre le systéme suivant : $\begin{cases} ax + by + z = 1 \\ x + aby + z = b \\ x + by + az = 1 \end{cases}$

Exercice 20.

Résoudre le systéme suivant : $\begin{cases} x + my + (m-1)z = m+1 \\ 3x + 2y + mz = 3 \\ (m-1)x + my + (m+1)z = m-1 \end{cases}$