Série 17 : Matrices

Exercice 1.
Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ où $\mathbb{K}$ est un corps commutatif .
Montrer que :$M^2 - (a+d)M + (ad-bc)I_2 = 0$

Exercice 2.
Résoudre dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ les équations suivanes :

1. $X^2 + X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
2. $XY = YX = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
3. $XY = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $YX = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

Exercice 3.
Vérifier que chacune des applications suivantes est linéaire de E dans F ,en donner les matrices relatives aux bases canoniques de E et F et déterminer leurs noyaux et leurs images

1. $f(x,y,z) = (x+y+z, x-y); E = \mathbb{R}^3$ et $F = \mathbb{R}^2$
2. $f(x,y,z) = (x-y, x, x+5y); E = \mathbb{R}^2$ et $F = \mathbb{R}^3$
3. $f(x,y,z) = (0, x-y, x-z); E = F = \mathbb{R}^3$
4. $f(a,b,c,d) = (a-2b+3d)X^2 + (c-d)(1-5X); E = \mathbb{R}^4$ et $F = \mathbb{R}_2[X]$

Exercice 4.
Soient f et g les applications linéaires associés canoniquement à $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.Déterminer les matrices de gof et fog dans les bases canoniques.

Exercice 5.
Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$

Généraliser pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & ... & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 6.
Soit $A = \begin{pmatrix} cos\alpha & -sin\alpha \\ sin\alpha & cos\alpha \end{pmatrix}$ Calculer A^n pour $n \in \mathbb{Z}$

Exercice 7.
Déterminer le centre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Exercice 8.
Montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$

Exercice 9.
Soit$\mathcal{B}_1 = ((1,2,1);(2,3,3);(3,7,1))$ et $\mathcal{B}_2 = ((3,1,4);(5,3,2);(1,-1,7))$

1. Montrer que$\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ sont des bases de $\mathbb{R}^3$
2. Déterminer la matrice P de passage de $\mathcal{B}_1$ à $\mathcal{B}_2$
3. Ecrire les formules de changement de coordonnées et en déduire P^{-1}

Exercice 10. ***Matrice à diagonale dominante***
Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que :$(\forall i \in \{1,...,n\})|a_{i,i}| > \sum\limits_{j=1, j \neq i}^{n} |a_{i,j}|$.
Montrer que A est inversible

Exercice 11.
Soit $A = \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle $rg(A) \leq 1$

1. Montrer que $\exists (U,V) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tels que $A = U(^tV)$et que $tr(A) = (^tV)U$
2. En déduire que $A^2 = tr(A)A$

Exercice 12.
Soit $A = \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.Montrer que $A^2 = 0 \Longleftrightarrow rg(A) \leq 1$ et $tr(A) = 0$

Exercice 13.
Soient A et B matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $A+B = \lambda AB$.Montrer que A et B commutent.

Exercice 14.
Soient A et B matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $A+B = AB$.Montrer que $A-I$ est inversible.

Exercice 15.

1. Soient A et B matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.Montrer que tr(AB)=tr(BA)
2. En déduire que deux matrices semblables ont même trace
3. Soient $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.A et B sont -elles semblables ?

Exercice 16.
Soient f une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$telle que $(\forall (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}))f(AB) = f(BA)$.
Montrer que $(\exists \lambda \in \mathbb{K})f = \lambda tr$

Exercice 17.
Montrer que le rang d'un projecteur est égal à sa trace

Exercice 18.
Soit $A = \begin{pmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \cdots & b & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.Calculer A^2 et déterminer A^{-1} lorsque A est inversible.

Exercice 19.

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \swarrow & \swarrow & 0 \\ 0 & \swarrow & \swarrow & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.Calculer A^2 et en déduire que A est inversible et donner son inverse.

Exercice 20.

Soient$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .Montrer que A et B sont semblables.

Exercice 21.

Soit ϕ l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ définie par $\phi(P(X)) = P(X+1)$

1. Déterminer la matrice de ϕ dans la base canonique de$\mathbb{R}_n[X]$
2. inverser $\begin{pmatrix} C_0^0 & C_1^0 & \cdots & C_n^0 \\ 0 & C_1^1 & \cdots & C_n^1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & C_n^n \end{pmatrix}$

Exercice 22.

Soit $D = diag(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ avec $\lambda_1, ..., \lambda_n$ des scalaires deux à deux distincts.Déterminer l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ commutant avec D.

Exercice 23.

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

1. Donner un polynôme annulateur de A
2. Montrer que A est inversible et déterminer A^{-1}
3. Calculer A^n pour $n \geq 2$

Exercice 24.

Soit $A = \begin{pmatrix} -3 & 7 & 3 \\ -5 & 17 & -5 \\ -5 & 23 & -11 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ associée canoniquement à A.Soit enfin la famille $\mathcal{B}' = (e_1'; e_2'; e_3')$ définie par $e_1' = (1,1,1); e_2' = (1,0,-1)$ et $e_3' = (2,1,1)$

1. Montrer $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$
2. Calculer mat(f,$\mathcal{B}'$)
3. Calculer D^n puis A^n pour $n \in \mathbb{N}$