Centre Ibn Abdoune — **18/03/2008**
Classes Préparatoires — **MPSI 1**
Khouribga — **ELOUADIH**

Série 16 : Intégration sur un intervalle quelconque

Exercice 1.
Etudier l'intégrabilité des fonctions suivantes :
- $f(x)=\frac{1}{x(1+x^2)}$ sur $[1,+\infty[$; $f(t)=\frac{ch(t)-cos(t)}{t^\alpha}$ sur $]0,1]$;
- $f(x)=\sqrt{x^2+2x+2}-x-1$ sur $[0,+\infty[$; $f(t)=\frac{1}{t}sin(\frac{1}{t^2})$ sur $]0,1]$;
- $f(x)=\frac{ln(x)}{x-1}$ sur $]0,+\infty[$;$f(x)=\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}$ sur $]0,+\infty[$
- $f(x)=\frac{x^\alpha}{x+1}$ sur $[0,+\infty[$;$f(x)=\frac{e^{-ax}}{1+x^2}$ sur $[0,+\infty[$
- $f(x)=\frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$ sur $]a,b[$; ;$f(x)=\frac{x^{\alpha-1}}{e^x-1}$ sur $]0,+\infty[$
- $f(x)=\frac{xln(x)}{x-1}$ sur $]0,1[$
- $f(x)=\frac{ln(1-x)}{x\sqrt{x}}$ sur $]0,1[$

Exercice 2. ***Intégrales de Bertrand***
On se propose d'étudier l'intégrabilité de la fonction f définie sur $[e,+\infty[$ par $f(t)=\frac{1}{t^\alpha ln^\beta(t)}$
Soit $\gamma=\frac{1+\alpha}{2}$
1. étudier l'intégrabilité de la fonction f lorsque $\alpha=1$
2. On suppose que $\alpha>1$.Montrer que $f(t)=o(\frac{1}{t^\gamma})$ au voisinage de $+\infty$.
   En déduire que f est intégrable sur $[e,+\infty[$
3. On suppose que $\alpha<1$.calculer $\lim\limits_{t\to+\infty} t^\gamma f(t)$.conclure

Exercice 3.
Existence et calcul des intégrales sivantes :
- $\int_0^{\frac{\pi}{2}} tan(x)dx$;$\int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}dx$
- $\int_0^1 \frac{dx}{1-x^2}$; $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)(x+2)(x+3)}$
- $\int_0^1 \frac{ln(x)dx}{(1+x)^2}$;$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{x^3(1-x)}}$

Exercice 4.
Calculer les limites suivantes :
1. $\lim\limits_{\alpha\to-1}(1+\alpha)\int_0^x (x-t)^\alpha ln(1+t^2)dx$ et $x>0$
2. $\lim\limits_{\alpha\to0^+}\int_0^\alpha \sqrt{\frac{1+x^2}{\alpha^2-x^2}}dx$
3. $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1 \frac{x^n lnx}{1+x}dx$
4. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x tf(t)dt$ où $f:\mathbb{R}^+\longrightarrow\mathbb{R}$ continue et intégrable sur $\mathbb{R}^+$

Exercice 5.
Soit $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ continue et décroissante sur $\mathbb{R}^+$.
Montrer que si f est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x) = 0$ (ind : utiliser $\int\limits_{\frac{x}{2}}^{x} f(t)dt$)

Exercice 6.
Soit $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue et intégrable $\mathbb{R}^+$.

1. Montre que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$
2. on suppose de plus que f est positive au voisinage de $+\infty$.
   Montrer que f^2 est intégrable sur $\mathbb{R}^+$

Exercice 7.
Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ telle que f^2 et $f"^2$ soient intégrables sur $\mathbb{R}^+$.
Montrer que f'^2 est intégrable sur $\mathbb{R}^+$

Exercice 8.
Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^*_+)$.On suppose qu'il existe un réel α telle que : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{xf'(x)}{f(x)} = \alpha$

1. Montrer que si $\alpha < -1$ alors f est intégrable sur $\mathbb{R}^+$
2. Montrer que si $\alpha > -1$ alors f est non intégrable sur $\mathbb{R}^+$
3. Que dire du cas $\alpha = -1$

Exercice 9.
On pose $A_n = \int\limits_0^{\sqrt{n}} (1 - \frac{t^2}{n})^n dt$ et $B_n = \int\limits_0^{+\infty} (1 + \frac{t^2}{n})^{-n} dt$

1. Montrer que $(\forall t \in [0, \sqrt{n}])(1 - \frac{t^2}{n})^n \leq e^{-t^2} \leq (1 + \frac{t^2}{n})^{-n}$
2. Calculer A_n et B_n en fonction des intégrales de Wallis
3. En déduire la valeur de l'intégrale de Gauss : $\int\limits_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$
4. Soit $\alpha > 0$,étudier l'éxistence et calculer $I_\alpha = \int\limits_0^{+\infty} e^{-(x^2 + \frac{\alpha^2}{x^2})} dx$

Exercice 10. ***La fonction Gamma***
On pose $\Gamma(x) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$

1. Déterminer le domaine de Γ
2. Montrer que $(\forall x > 0)\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x)$
3. Calculer $\Gamma(n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$
4. Calculer $\Gamma(\frac{1}{2})$

Exercice 11.
On pose $F(x) = \int\limits_x^{+\infty} \frac{sin(t)}{t} dt$

1. Montrer que Fest de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$
2. Montrer que F est non intégrable sur $\mathbb{R}^+$
3. Montrer que $\int\limits_x^{+\infty} F(t)dt$ admet une limite à droite en 0

Exercice 12.

On pose $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} ln(sin(t))dt \,;\ J = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} ln(cos(t))dt$

1. justifier l'existence de I et J
2. Montrer que I=J
3. En considérant I+J ,calculer I
4. Calculer $K = \int\limits_0^{\pi} tln(sin(t))dt$

Exercice 13. ***Sommation des équivalents***

Soient $f, g : [a, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^+$ deux fonctions continues et positifs telles que :
$f(x) \sim g(x)$ au voisinage de $+\infty$

1. Montrer que si f est intégrable sur $[a, +\infty[$ alors $\int\limits_x^{+\infty} f(t)dt \sim \int\limits_x^{+\infty} g(t)dt$ au voisinage de $+\infty$
2. Montrer que si f est non intégrable sur $[a, +\infty[$ alors $\int\limits_0^{x} f(t)dt \sim \int\limits_0^{x} g(t)dt$ au voisinage de $+\infty$
3. Application : $\int\limits_x^{+\infty} e^{-t^2} dt \sim \frac{e^{-x^2}}{2x}; \int\limits_e^{x} \frac{dt}{ln(t)} \sim \frac{x}{ln(x)}$ au voisinage de $+\infty$

Exercice 14. ***Expression intégrale de la constante d'Euler***

On note {x}=x-E(x)

1. Montrer que $x \longrightarrow \frac{\{x\}}{x^2}$ est continue par morceaux sur $[1, +\infty[$
2. Montrer que $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\{x\}dt}{x^2} = 1 - \gamma$

   la costante d'Euler est définie par :$\gamma = \lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - ln(n)$