Centre Ibn Abdoune — **05/03/08**
Classes Préparatoires — **MPSI 1**
Khouribga — **ELOUADIH**

Série 15 : Intégration sur un segment

Exercice 1.
soit f_n la fonction définie sur [0,1] par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{p^2}{n^2} & : x \in [\frac{p-1}{n}, \frac{p}{n}[1 \leq p \leq n \\ 1 & : x = 1 \end{cases}$$

1. Montrer que f_n st est escalier sur [0,1] et calculer $\int_{[0,1]} f_n$
2. En déduire en utilisant la définition la valeur de $\int_{[0,1]} x^2 dx$

Exercice 2.
Calculer les limites des suites suivantes :
$u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\sqrt[n]{2^k}}{n}$; $v_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{n+k}{n^2+k^2}$;$w_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^2 \sqrt[3]{n^3+k^3}}$; $z_n = \sum\limits_{k=1}^{n} sin(\frac{1}{n+k})$;
$t_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} sin(\frac{k\pi}{n})$; $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} sin(\frac{k\pi}{n}) sin(\frac{k\pi}{n^2})$;$y_n = \sqrt[n]{\prod\limits_{k=1}^{n} (1 + \frac{k^2}{n^2})}$;
$a_n = \frac{1}{n} \sqrt[n]{n!}$; $b_n = \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{k}{n})^2}}$

Exercice 3.

1. Soit f une fonction continue sur [a,b] telle que $(\forall x \in [a,b]) f(a+b-x) = f(x)$.
   Montrer que :$\int\limits_a^b x f(x) dx = \frac{a+b}{2} \int\limits_a^b f(x) dx$
2. Application :$\int\limits_0^\pi \frac{x}{1+sin(x)} dx$

Exercice 4.
Soit f une fonction continue sur [a,b] telle que pour toute fonction en escalier φ sur [a,b] on ait $\int_{[a,b]} f\varphi = 0$. Montrer que $f = 0$

Exercice 5.
Soit f une fonction continue sur [a,b].On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$telle que
$(\forall k \in \{0, 1, ..., n\}) \int\limits_a^b x^k f(x) dx = 0$. Montrer que f admet au moins n+1 zéros dans [a,b]

Exercice 6.
Soit $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2}$

1. Déterminer $l = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n$
2. montrer que $l - u_n \sim \frac{\lambda}{n}$

Exercice 7.

1. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} \int\limits_0^{\pi} \frac{nsin(x)}{n+x} dx$
2. En déduire un équivalent de $\int\limits_0^{\pi} \frac{sin(x)}{n+x} dx$

Exercice 8.

Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue.on pose $u_n = \int\limits_0^1 t^n f(t) dt$

1. Montrer qu'il existe un $M > 0$ tel que :
   $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \eta > 0)(\forall n \in \mathbb{N}) |u_n - f(1) \int\limits_0^1 t^n dt| \leq 2M(1-\eta)^n + \frac{\varepsilon}{n+1}$
2. En déduire que si $f(1) \neq 0$ on a $u_n \sim \frac{f(1)}{n}$
3. Application : chercher un équivalent de $u_n = \int\limits_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt$

Exercice 9. ***Lemme de Lebesgue***

1. Soit $f \in C^1([a,b], \mathbb{R})$.Montrer que :
   $\lim\limits_{n \to +\infty} \int\limits_a^b f(t) cos(nt) dt = 0$ et que $\lim\limits_{n \to +\infty} \int\limits_a^b f(t) sin(nt) dt = 0$
2. Montrer que la fonction φ définie sur $]0, \frac{\pi}{2}]$ par $\varphi(t) = tcotan(t)$ est prolongeable en une fonction de classe C^1 sur $[0, \frac{\pi}{2}]$
3. Déterminer les constantes a et b telles que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \int\limits_0^{\pi} (at + bt^2) cos(nt) dt = \frac{1}{n^2}$
4. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$

Exercice 10.

Soit $f \in C^1([a,b], \mathbb{R})$ telle que $f(a) = 0$. Montrer que $\int\limits_a^b f^2 \leq \frac{(b-a)^2}{2} \int\limits_a^b f'^2$

Exercice 11. ***Cas de l'égalité de l'inégalité de la moyenne***

Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{K}$ un fonction continue.

1. On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et ,quitte à changer f en -f , que $\int\limits_a^b f(x) dx = \int\limits_a^b |f(x)| dx$.
   Montrer que f est de signe constant sur [a,b]
2. On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et on pose $\int\limits_a^b f(x) dx = |\int\limits_a^b f(x) dx| e^{i\theta}$.
   (a) Montrer que la fonction g définie par $g(x) = f(x) e^{-i\theta}$ vérifie l'égalité $\int\limits_a^b g(x) dx = \int\limits_a^b |g(x)| dx$
   (b) En déduire que $Rel(g) = |g|$ et que $Im(g) = 0$
   (c) A quelle condition f vérifie l'égalité de la moyenne.

Exercice 12.

Soit f une fonction continue et positive sur [a,b].

Montrer que : $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt[n]{\int\limits_a^b (f(x)^n) dx} = sup_{x \in [a,b]} f(x)$

Exercice 13.
Soit $f \in C^1([a,b],\mathbb{R})$ telle que $f(a)=f(b)=0$ et $M = sup|f'(x)|$.
Montrer que $|\int\limits_a^b f(x)dx| \leq M\frac{(b-a)^2}{4}$

Exercice 14.
Déterminer le domaine d'existence et calculer les primitives suivantes :
$\int \frac{dx}{x(1+x^2)^2}; \int \frac{dx}{(1+x^3)^2}; \int \frac{e^x dx}{\sqrt{1+e^x}}; \int \frac{dx}{x(x^2-3x+2)}; \int \frac{xdx}{x^3-3x+2}; \int \frac{dx}{1+2cosx};$
$\int \frac{sinxdx}{\sqrt{cosx+cos2x}}; \int \frac{xdx}{\sqrt[3]{2x+3}}; \int \frac{dx}{a^2+cos^2(x)}; \int \frac{xdx}{cos^2(x)}; \int \frac{dx}{x\sqrt{1+x}};$
$\int xarcsinxdx; \int xarctanxdx; \int xch(x)sin(2x)dx; \int ln(x^2+6x+10)dx$

Exercice 15.
calculer les intégrales suivantes :
$\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{cos(x)sin^3(x)dx}{1+cos^2(2x)}; \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1+sin^2(x)}; \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{3+cos^2(x)}; \int\limits_1^2 \frac{cos(ln(t))dt}{t}; \int\limits_1^2 ln^2(t)dt$

Exercice 16.
Soit $f(x) = \int\limits_x^{2x} \frac{4dt}{\sqrt{1+t^4}}$.
Etudier f (son domaine ,sa parité ,sa dérivée et son sens de variation ,ses limites en $\pm\infty$ et un équivalent en $\pm\infty$)

Exercice 17.
Soit $f(x) = \int\limits_x^{x^2} \frac{(t-1)dt}{lnt}$.
Etudier f (son domaine ,sa limite en $+\infty$,sa dérivée et son sens de variation)

Exercice 18. ***Intégrales de Wallis***
Pour $n \in \mathbb{N}$,on pose $I_n = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (sint)^n dt = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (cost)^n dt$

1. Montrer que (I_n) est strictement décroissante et en déduire qu'elle est convergente
2. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$
3. En déduire I_{2n}et I_{2n+1} en fonction de n
4. Démontrer que la suite $((n+1)I_n I_{n+1})$est constante et déterminer sa valeur
5. Montrer que $I_{n+1} \sim I_n$
6. Donner un équivalent de I_n

Exercice 19.
Pour $x > 0$ on pose $f(x) = \int\limits_x^{3x} \frac{cos(t)}{t} dt$

1. Montrer qu'il existe $u_x > 0$ tel $f(x) = cos(u_x) ln(3)$
2. En déduire que f se prolonge en une fonction de classe C^1 sur $[0, +\infty[$
3. Par une intégration par parties ,établir que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$