

Série 14 : Fractions rationnelles

Exercice 1.

Montrer qu'il n'existe pas de fraction rationnelle F telle que $F^2 = X$

Exercice 2.

Décomposer dans $\mathbb{R}(X)$ les fractions rationnelles suivantes :

$$F = \frac{1}{X(X-1)(X-2)\dots(X-n)}; F = \frac{X^3+X+1}{X(X+1)(X^2+X+1)}; F = \frac{1}{X(X+1)^2(X^2+X+1)};$$

$$F = \frac{X}{X^4+X^2+1}; F = \frac{X^2-X+1}{(X^4+1)(X^2+X+1)^2}; F = \frac{X^2+X+1}{(X^2+1)^2(X^2-1)}; F = \frac{n!}{(X+1)(X+2)\dots(X+n)}$$

Exercice 3.

Décomposer dans $\mathbb{C}(X)$ et $\mathbb{R}(X)$ les fractions rationnelles suivantes :

$$F = \frac{1}{X^8+X^4+1}; F = \frac{1}{X^4-1}; F = \frac{1}{X^4+1}; F = \frac{1}{X^n-1}; F = \frac{1}{X^n+1}; F = \frac{1}{X^2-2X\cos\theta+1};$$

Exercice 4.

- Déterminer la partie polaire relative au pôle 1 de la fraction rationnelle $F = \frac{X^3}{(X^3-1)^3}$
- En remarquant $F(jX) = \overline{F(X)}$, décomposer F dans $\mathbb{C}(X)$
- Décomposer F dans $\mathbb{R}(X)$

Exercice 5.

Mettre sous forme irréductible les fractions rationnelles suivantes :

$$F = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\omega_k^2}{X-\omega_k}; G = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\omega_k^2}{(X-\omega_k)^2}; H = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\omega_k^3}{(X-\omega_k)^2} \text{ avec } \omega_k = e^{\frac{i2k\pi}{n}} \text{ et } n \geq 2$$

Exercice 6.

Calculer en fonction de n les sommes suivantes : $S_n = \sum_{p=1}^n \frac{1}{p(p+1)(p+2)}$; $T_n = \sum_{p=1}^n \frac{p}{p^4+p^2+1}$;

Exercice 7.

Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ où $S_n = \sum_{p=3}^n \frac{4p-3}{p(p-2)(p+2)}$

Exercice 8.

Déterminer la dérivée n^{eme} des fractions rationnelles suivantes :

$$A = \frac{X}{X^2+X-2}; B = \frac{1}{X^2+2}; F = \frac{1}{X^2-2X\cos(\alpha)+1}; F = \frac{1}{X(X+1)(X+2)\dots(X+n)}$$

Exercice 9.

Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ où $S_n = \sum_{p=1}^n \frac{1}{p(p+1)(p+2)}$

Exercice 10.

Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ où $S_n = \sum_{p=1}^n \frac{1}{1+2+\dots+p}$

Exercice 11.

Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ où $S_n = \sum_{p=1}^n \frac{1}{1^2+2^2+\dots+p^2}$

Exercice 12.

Exercice 13.

Exercice 14.

Exercice 15.

Exercice 16.

Exercice 17.

Exercice 18.