**Centre Ibn Abdoune** **06/02/08**
**Classes Préparatoires** **MPSI 1**
**Khouribga** **ELOUADIH**

# Série 13 : Espaces vectoriels de dimension finie

**Exercice 1.**

1. Montrer que $(1, \sqrt{2}, \sqrt{3})$est libre dans le $\mathbb{Q}$ e.v $\mathbb{R}$
2. En déduire que le cercle de centre $\Omega(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ et de rayon R passe au plus par un point de coordonnées rationnelles

**Exercice 2.**
Montrer que $(1,1,1); (1,0,1); (0,1,1)$est une base de $\mathbb{R}^3$

**Exercice 3.**
Soit $A = \{(a, a+b, 2b)/(a,b) \in \mathbb{R}^2\}$ et $B = \{(2k+h, 2h, 3h)/(h,k) \in \mathbb{R}^2\}$

1. Montrer que A et B des s.e.v de $\mathbb{R}^3$ et déterminer leur dimension
2. Déterminer $A + B$ et $A \cap B$

**Exercice 4.**
Montrer que $H = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 / x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$est un hyperplan de$\mathbb{R}^4$

**Exercice 5.**
Soit E un $\mathbb{K}e.v$ de dimension n et$B = (e_1, ..., e_n)$une base de E.
Soient $u_1 = e_1; u_2 = e_1 + e_2; ...;$et $u_n = e_1 + ... + e_n$.

1. Montrer que$B' = (u_1, ...u_n)$ est une base de E
2. Calculer les composantes d'un vecteur u dans B' en fonction de celles de u dans B

**Exercice 6.**
Soit E un $\mathbb{K}e.v$ et$L = (u_1, ...u_n)$ une famille libre de E .
En est-il de même pour $L' = (u_1 + u_2, u_2 + u_3, ..., u_n + u_1)$

**Exercice 7.**
Soit $n \geq 2$

1. Montrer que $(1, X-1, (X-1)(X-2), ..., (X-1)(X-2)...(X-n))$est une base de $\mathbb{R}_n[X]$
2. Calculer les composantes de $X^2 + 3X + 1$dans cette base

**Exercice 8.**
Soit $(P_0, P_1, ..., P_n)$une famille de polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$telle que $deg(P_i) = i$.Montrer que $(P_0, P_1, ..., P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$

**Exercice 9.**
Soit E un $\mathbb{C}$ e.v de dimension n . Montrer que E peut être considéré comme un $\mathbb{R}$ e.v de dimension 2n

**Exercice 10.** ***Intérpolation de Lagrange***

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, a_2, .., a_{n+1} (n+1)$réels distincts .On pose$L_i(X) = \prod_{k=1, k\neq i}^{n+1} \frac{X - a_j}{a_i - a_j}$

1. Déterminer $deg(L_i); L_i(a_j)$
2. Monter que $(L_1, L_2, ..., L_{n+1})$est une base de$\mathbb{R}_n[X]$
3. Calculer les composantes d'un polynôme P dans cette base.
4. Connaissant une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$en $(n+1)$ points distincts $(a_i)_{1\leq i\leq n+1}$, montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$tel que : $\forall i \in \{1, 2, ..., n+1\} P(a_i) = f(a_i)$.On dit P interpole f aux points $(a_i)$

**Exercice 11.**
Soit E un $\mathbb{R}$ e.v de dimension finie et$f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $fof = -Id_E$

1. Montrer que f est bijective
2. Montrer que pour tout $x$ de E non nul $(x, f(x))$ est libre
3. On se propose de montrer que la dimension est paire
   (a) On suppose que $dim(E) \geq 3$.Il existe donc $y \in E$ tel que $(x, f(x), y)$ soit libre.Montrer que $(x, f(x), y, f(y))$ est libre.
   (b) Montrer par récurrence que s'il $(x_1, x_2, ..., x_p) \in E^p$ tel que$(x_1, x_2, ..., x_p, f(x_1), f(x_2), ..., f(x_{p-1}))$ est libre alors$(x_1, x_2, ..., x_p, f(x_1), f(x_2), ..., f(x_{p-1}), f(x_p))$ est libre
   (c) Soit $A = \{F/(\exists q \in \mathbb{N}^*), \exists(x_1, x_2, ..., x_q) \in E^q, F = (x_1, x_2, ..., x_q, f(x_1), f(x_2), ..., f(x_q)) et F est libre\}$
      i. Montrer que A est non vide et admet un element maximal B
      ii. Montrer que B est une base de E et conclure
4. autre méthode :munir E d'une stucture de $\mathbb{C}$ e.v

**Exercice 12.**
Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tel que $f(x, y, z) = (x - y, z - y, x - y)$

1. Montrer que$f \in \mathcal{L}(E)$
2. Déterminer Ker(f) et Im(f)
3. Montrer que **ker(f) et Im(f) ne forment pas une somme directe**

**Exercice 13.**
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $rg(f) = 1$.Montrer que $(\exists \lambda \in \mathbb{K}) f^2 = \lambda f$

**Exercice 14.**
Soient a et b deux complexes tels que $b \neq 0$.E l'ensemble des suites $(u_n)$tels que : $(\forall n \in \mathbb{N}) u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$
Soit $f : E \longrightarrow \mathbb{C}^2$ tel que $f((u_n)) = (u_0, u_1)$.Montrer que f est un isomorphisme et en déduire dim(E)

**Exercice 15.**
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^3 = -f$.Montrer que $E = ker(f) \oplus Im(f)$

**Exercice 16.**
Soit E un $\mathbb{K}$ e.v de dimension finie et$f \in \mathcal{L}(E)$.On pose $K_n = Ker(f^n)$ et $I_n = Im(f^n)$

1. Montrer que$(K_n)$ est croissante et $(I_n)$ est décroissante
2. Montrer que ces deux suites stationnent au même rang p et que$E = ker(f^p) \oplus Im(f^p)$

**Exercice 17.**
Soit E un $\mathbb{K}$ e.v de dimension finie $n \geq 1$Soit f un endomorphisme de E nilpotent d'indice p i.e :$p \geq 2, f^p = 0 et f^{p-1} \neq 0$

1. Montrer qu'il existe $a \in E$ tel que $f^{p-1}(a) \neq 0$ et que $(a, f(a), ..., f^{p-1}(a))$ est libre
2. En déduire que $p \leq n$ et que $f^n = 0$
3. Vérifier que les inclusions $\{0_E\} \subset ker(f) \subset ker(f^2) \subset ... \subset ker(f^p) = E$ sont strictes

4. Montrer que si $rg(f) = n - 1$ alors $dim(ker(f^i)) = i$ pour tout $i \in \{1, 2, ..., p - 1\}$

**Exercice 18.**
Soit E un $\mathbb{K}$ e.v de dimension finie.Déterminer le centre de $\mathcal{L}(E)$.
i.e $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que$\forall g \in \mathcal{L}(E) fog = gof$

**Exercice 19.**
Soit E un $\mathbb{K}$ e.v de dimension finie et $f, g \in \mathcal{L}(E)$

1. Montrer que $|rg(f) - rg(g)| \leq rg(f + g) \leq rg(f) + rg(g)$
2. Déterminer $rg(f) + rg(g)$lorsque $g + f$ est bijectif et $gof = 0$

**Exercice 20.**
Soit E un $\mathbb{K}$ e.v **de dimension finie** et $u \in \mathcal{L}(E)$.Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

1. $E = ker(u) \oplus Im(u)$
2. $E = ker(u) + Im(u)$
3. $ker(u) \cap Im(u) = \{0_E\}$
4. $ker(u) = ker(u^2)$
5. $Im(u) = Im(u^2)$

Etudier $\varphi : \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}[X]$ telle que $\varphi(P) = XP$
comparer $ker(\varphi)$ et $ker(\varphi^2)$ ; E et $ker(\varphi) \oplus Im(\varphi)$

**Exercice 21.**
Soit $E_n$ l'ensemble des fonctions polynômiales réelles de degré $\leq n$ rapporté à la base $B = (e_0, e_1, ..., e_n)$définie par $e_k(x) = \frac{x^k}{k!}$.
Déterminer la base duale $B^* = (e_0^*, e_1^*, ..., e_n^*)$ de $B = (e_0, e_1, ..., e_n)$.

**Exercice 22.**
Soit $a \in \mathbb{K}$

1. Montrer que la famille $((X - a)^k)_{0 \leq k \leq n}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$
2. Déterminer sa base duale

**Exercice 23.**
Soit E un $\mathbb{K}$ e.v de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$.
Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

1. f est inversible à gauche dans $(\mathcal{L}(E), o)$
2. f est inversible à droite dans $(\mathcal{L}(E), o)$
3. f est inversible dans $(\mathcal{L}(E), o)$
4. f est régulier à gauche dans$(\mathcal{L}(E), o)$
5. f est régulier à droite dans$(\mathcal{L}(E), o)$
6. f est régulier dans $(\mathcal{L}(E), o)$
7. f est injectif
8. f est surjectif
9. f est bijectif

**Exercice 24.**
Soit E et F deux $\mathbb{K}$ e.v de dimension finies $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et E' un s.e.v de E.
Montrer que :$dim(f(E')) = dim(E') - dim(E' \cap Kerf)$