Centre Ibn Abdoune **30/01/08**
Classes Préparatoires **MPSI 1**
Khouribga **ELOUADIH**

Série 12 : Espaces vectoriels

Exercice 1.
Dans l'espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$,montrer que les familles suivantes sont libres :
$(e^{\alpha x})_{\alpha\in\mathbb{R}}; (|x-a|)_{a\in\mathbb{R}}; (cos(nx))_{n\in\mathbb{N}}; (sin(nx))_{n\in\mathbb{N}}$

Exercice 2.
Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$et $g \in \mathcal{L}(F,G)$ Montrer que :$gof = 0 \Longleftrightarrow Im(f) \subset Ker(g)$

Exercice 3.
Soit E un $\mathbb{K}ev$ et A et B deux sev de E.Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.
Montrer que :$f(A) \subset f(B) \Longleftrightarrow A + Ker(f) \subset B + Ker(f)$

Exercice 4.
Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$et $g \in \mathcal{L}(F,G)$.Montrer que $Ker(gof) = f^{-1}(Im(f) \cap Ker(g))$

Exercice 5.
Soit E un $\mathbb{K}ev$ et$f \in \mathcal{L}(E)$.Montrer que :

1. $Ker(f) = Ker(f^2) \Longleftrightarrow Im(f) \cap Ker(f) = \{0_E\}$
2. $Im(f) = Im(f^2) \Longleftrightarrow Im(f) + Ker(f) = E$
3. $f^2 = 0 \Longleftrightarrow Im(f) \subset Ker(f)$

Exercice 6.
Soit P un polynome de $\mathbb{R}[X]$non nul.Soit $\mathcal{R}$l'application qui à un polynome A fait correspondre le reste de sa division euclidienne par P.Montrer que $\mathcal{R} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}[X])$.Déterminer son image et son noyau. On montrera que $\mathcal{R}$ est le projecteur sur$\mathbb{R}_n[X]$ parallélement à $P\mathbb{R}[X]$ avec $deg(P) = n + 1$

Exercice 7.
Soient a et b deux éléments de $\mathbb{K}$tel que $a \neq b$ et $u \in \mathcal{L}(E)$tel que $(u-aid_E)\circ(u-bid_E) = 0$
Montrer que $E = Ker(u - aid_E) \oplus Ker(u - bid_E)$

Exercice 8.
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $(\forall x \in E)(x, u(x))$ est liée.
Montrer que u est une homothétie vectorielle.

Exercice 9.
Soient p et q deux projecteurs de E.

1. Montrer que $p + q$ est un projecteur $\Longleftrightarrow poq = qop = 0$
2. Montrer dans ce cas :$Ker(p+q) = Ker(p) \cap Ker(q)$ et $Im(p+q) = Im(p) \oplus Im(q)$

Exercice 10.
Soit $\varphi : \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}[X]$ telle que $\varphi(P) = XP$ Montrer que φest un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ Déterminer son noyau et son image.

Exercice 11.
Soit E un $\mathbb{K}$ev et$f \in \mathcal{L}(E)$

1. On suppose que $\exists n \in \mathbb{N}^* f^n = 0$. Montrer que $\forall \lambda \in \mathbb{R}^* \lambda id_E - f$ est inversible
2. On suppose que $\exists P \in \mathbb{K}[X] P(f) = 0$ et $P(0) \neq 0$. Montrer que f est inversible

Exercice 12.
Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$une suite de polynomes de $\mathbb{K}[X]$ de dégrés deux à deux distincts.
Montrer que $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est libre.Donner des exemples de telles familles.En particulier les familles echelonnées $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $deg(P_n) = n$

Exercice 13.
Soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $F = \{f \in E/f(0) = f(1) = 0\}$.
Montrer que F est un sev de E . Trouver un supplémentaire de F.

Exercice 14.
Soit $E = \mathbb{R}^n$ et $H = \{(x_1, x_2, ...x_n) \in E/x_1 + x_2 + ... + x_n = 0\}$.Montrer que H est un sev de E et trouver un supplémentaire de H.

Exercice 15.
Soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $F = \{f \in E/f(1) = 0\}$ et $G = \{f \in E/(\exists a \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R})f(x) = ax\}$.
Montrer que F et G sont des sev de E supplémentaires.

Exercice 16.
Déterminer le noyau et l'image de l'application linéaire
$u : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3 (x, y, z, t) \longmapsto (x - y + t, 2x + y - z, y + z)$

Exercice 17.
Soient f et g $\in \mathcal{L}(E)$ tels que $fog = gof$. Montrer que Ker(f) et Im(f) sont stables par g

Exercice 18. ***Théoreme de décomposition des noyaux***
Soit E un $\mathbb{K}$ev et $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P \wedge Q = 1$.
Montrer que $\forall u \in \mathcal{L}(E) Ker(P(u)) \oplus Ker(Q(u)) = Ker(PQ(u))$