Centre Ibn Abdoune | **25/01/2008**
Classes Préparatoires | **MPSI 1**
Khouribga | **ELOUADIH**

Série 11 : Développements limités

Exercice 1.
Donner le $DL_3(0)$de : $f(x) = \frac{e^x}{\sqrt{1+x^2}}$; $g(x) = (1 + sin(x))^x$

Exercice 2.
Donner le $DL_5(0)$de $f(x) = (1 - chx)(ln(1 + x)$;$DL_4(0)$de $g(x) = (1 + x)^x$

Exercice 3.
Donner le $DL_3(\frac{\pi}{6})$de $f(x) = cos(x)$

Exercice 4.
Donner le $DL_2(0)$de $f(x) = \sqrt{1 + \sqrt{1 + x}}$

Exercice 5.
Donner le $DL_2(0)$de $f(x) = (1 - x + x^2)^{\frac{1}{x}}$

Exercice 6.
Donner le $DL_3(1)$de $f(x) = \sqrt{1 + x}$

Exercice 7.
Donner le DL_3de $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} - x$ en$+\infty$

Exercice 8.
Calculer les limites suivantes :$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2tanx - tan2x}{x(1 - cos(3x))}$; $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{e^x - 1} - \dfrac{1}{x}$; $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2}{1 - x^2} - \dfrac{3}{1 - x^3}$

Exercice 9.
Montrer que la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{ln(x+1)} - \frac{1}{x}$ est prolongeable en une fonction de classe C^1sur $]-1, +\infty[$

Exercice 10.
Montrer que la fonction f définie par $f(x) = x + ln(x+1)$ définit une bijection sur$]-1, +\infty[$ et que sa bijection réciproque f^{-1} admet un DL de tout ordre en 0 et former $DL_3(0)$ de f^{-1}

Exercice 11.
Déterminer les asymptotes de $f(x) = \sqrt[3]{(x^2 - 2)(x + 3)}$

Exercice 12. ***Méthode deCésaro***
Principe : Soit (u_n) une suite convergeant vers 0,on fait un DL de $\frac{1}{u_{n+1}^\alpha} - \frac{1}{u_n^\alpha}$ et α est déterminé de telle sorte que$\frac{1}{u_{n+1}^\alpha} - \frac{1}{u_n^\alpha}$converge vers une limite finie et non nulle l et aprés Césaro.
Exemples :
$u_0 = 1$ et $u_{n+1} = sin(u_n)$
$u_0 = 2$ et $u_{n+1} = ln(1 + u_n)$

Exercice 13.
Etudier la fonction $f : x \longrightarrow x^2 e^{\frac{x}{x^2-1}}$

Exercice 14.
On considére l'équation $(E) : tan(x) = x$ $(x \in \mathbb{R})$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$l'équation (E)admet dans chaque intervalle $]n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2}[$une unique solution x_n
2. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$
3. Montrer que $x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - Arctan(\frac{1}{x_n})$ puis donner un DL généralisé en $\frac{1}{n}$ de x_n à l'ordre 2

Exercice 15.
Donner l'équation de la tangente en 0 ainsi que sa position par rapport à la courbe de $f(x) = \frac{1}{e^x-1} - \frac{1}{ln(x+1)}$

Exercice 16.
Etudier les branches infinies en $+\infty$ de $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}\frac{x^2-x+2}{x+1}$ et $g(x) = e^{-\frac{1}{x}}\frac{x^3}{x-1}$

Exercice 17.
Déterminer la parie principale en 0 de $f(x) = cos(x)^{sin(x)}$ et $g(x) = \frac{1}{tan^2(x)} - \frac{1}{x^2}$

Exercice 18.
Calculer les limites suivantes :$\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{sin(x)}{x})^{\frac{1}{x^2}}; \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sqrt[3]{1+x} - 2\sqrt{1+x} - 1}{x^2}$

Exercice 19.
Calculer les limites suivantes :$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}ln(\dfrac{e^x-1}{x}); \lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x + \sqrt{x+\sqrt{x}}} - \sqrt{x}$

Exercice 20.
Démontrer les inégalités suivantes :

1. $(\forall x \geq 0)x - \frac{x^2}{2} \leq ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$
2. $(\forall x \geq 0)x - \frac{x^3}{3!} \leq sin(x) \leq x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$
3. $(\forall x \in \mathbb{R})x - \frac{x^2}{2} \leq cos(x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!}$

Exercice 21.
Montrer que la fonction f définie par $f(x) = 2tan(x) - x)$ définit une bijection sur$] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et que sa bijection réciproque f^{-1} est de classe C^∞ et former $DL_6(0)$ de f^{-1}

Exercice 22.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$

1. Montrer que l'équation $e^x+x-n = 0$ admet une solution unique dans$\mathbb{R}^+$qu'on notera u_n
2. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$
3. Montrer que $u_n \sim ln(n)$
4. On pose$v_n = u_n - ln(n)$.Trouver un équivalent de v_n
5. déterminer a et b tels que $u_n = aln(n) + b\frac{ln(n)}{n} + o(\frac{ln(n)}{n})$