Centre Ibn Abdoune **24/01/2008**
Classes Préparatoires **MPSI 1**
Khouribga **ELOUADIH**

Série 10 : Fonctions usuelles

Exercice 1.
déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n}$ et un équivalent de $\sqrt[n]{n}-1$

Exercice 2.
On cherche des couples (x, y)d'entiers strictement positifs tels que $x^y = y^x$et $x < y$

1. Donner un exemple d'un tel couple
2. Etudier la fonction f définie par $f(x) = \frac{ln(x)}{x}$
3. En déduire que le couple précédent est l'unique solution de $x^y = y^x$et $1 \leq x < y$

Exercice 3. *Approximation de e*
Premiére méthode :

1. A l'aide de l'inégalité $e^x \geq 1 + x$,établir que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)(\frac{n+1}{n})^n \leq e(\frac{n+1}{n})^{n+1}$ (faire $x = \frac{1}{n}$ et $x = -\frac{1}{n+1}$)
2. En déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}^*)0 \leq e - (1 + \frac{1}{n})^n \leq \frac{3}{n}$
3. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}(1 + \dfrac{1}{n})^n$ et un calcul approché de e à 10^{-2} prés

Premiére méthode :

1. Etablir que $(\forall n \in \mathbb{N})e = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{n!}\int_0^1 (1-t)^n e^t dt$
2. En déduire que :$(\forall n \in \mathbb{N})0 \leq e - \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \leq \frac{3}{(n+1)!}$
3. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k!}$ et un calcul approché de e à 10^{-2} prés

Exercice 4.
Montrer que : $(\forall(x, y) \in \mathbb{R}^2)$tel que $xy \neq 1 Arctan(x) + Arctan(y) = Arctan(\frac{x+y}{1-xy}) + p\pi$
où

$$\begin{cases} p = 0 & si & xy < 1 \\ p = 1 & si xy > 1 & et x > 0 \\ p = -1 & si xy > 1 & et x < 0 \end{cases}$$

Application :etudier la suite $u_n = \sum\limits_{p=0}^{n} Arctan(\frac{1}{1+p(p+1)})$

Exercice 5.
Montrer que :$4Arctan\frac{1}{5} - Arctan\frac{1}{239} = \frac{\pi}{4}$(**Formule de Machin**)

Exercice 6.
Etudier la fonction $f(x) = Arcsin(4x^3 - 3x)$

Exercice 7.
Montrer que $(\forall x \in [0,1]) Arcsin(\sqrt{x}) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} Arcsin(2x-1)$

Exercice 8.
Calculer $\sum\limits_{k=0}^{n} ch(kx)$

Exercice 9.

1. Montrer que$(\forall x > 0) x - \frac{x^2}{2} \leq ln(1+x) \leq x$
2. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} \prod\limits_{k=1}^{n} (1 + \dfrac{k^2}{n})$