Centre Ibn Abdoune **05/01/2008**
Classes Préparatoires **MPSI 1**
Khouribga **ELOUADIH**

Série 9 : Dérivation

Exercice 1.
Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $a \in I^o$.Si la fonction $h \longrightarrow \frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$admet une limite en 0 dans $\mathbb{R}$ celle-ci est appelée dérivée symétrique de f en a et sera noté $f'_s(a)$

1. Montrer que si f est dérivable à droite et à gauche en a alors f admet une dérivée symétrique en a
2. la réciproque est -elle vraie ?

Exercice 2.
Soit$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $(\forall(x,y) \in \mathbb{R}^2)|f(x)-f(y)| \leq |x-y|^2$.Montrer que f est constante.

Exercice 3.
Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que

1. $\forall(x,y) \in \mathbb{R}^2 f(x+y) = f(x)+f(y)$
2. $\forall(x,y) \in \mathbb{R}^2 f(x+y) = f(x)f(y)$

Exercice 4.
Soit $f :]-1,1[\longrightarrow \mathbb{R}$ une application dérivable en $0.(a_n)$et (b_n) deux suites convergeant vers 0et telles que : $\forall n \in \mathbb{N} -1 < a_n < 0 < b_n < 1$.Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{f(b_n)-f(a_n)}{b_n-a_n}$

Exercice 5.
Soit f une fonction de classe C^∞ sur $]0,+\infty[$.Montrer que :
$(\forall n \in \mathbb{N}^*)(t^{n-1}f(\frac{1}{t}))^{(n)} = (-1)^n t^{-n-1} f^{(n)}(\frac{1}{t})$.
Application : Calculer les dérivées n^{eme}de $e^{\frac{1}{x}}; x^{n-1}ln(x+1); x^{n-1}sh(\frac{1}{x})$ sur $]0,+\infty[$

Exercice 6. ***Régle de L'Hospital***
Soient f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$ et dérivables sur $]a,b[$telles que
$f(a) = g(a) = 0$et $\forall x \in]a,b[g'(x) \neq 0$.
Montrer que :$\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \overline{\mathbb{R}} \Longrightarrow \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = l$

Application calculer les limites suivantes :$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{sin(x)-x}{x^3}; \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x-x-1}{x^2}; \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{ln(1+x)-x}{x^2}$

Exercice 7.
A l'aide des accroissements finis ,étudier les suites suivantes : $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$et $v_n = \sum\limits_{k=2}^{n} \frac{1}{kln(k)}$

Exercice 8. ***Théoreme de Rolle généralisé***
Soit f une fonction continue sur $[a,+\infty[$et dérivable sur$]a,+\infty[$telle que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = f(a)$
Montrer que$(\exists c \in]a,+\infty[) f'(c) = 0$

Exercice 9.
Montrer que :

1. $\frac{\pi}{4} + \frac{3}{25} < arctan(\frac{4}{3} < \frac{\pi}{4} + \frac{1}{6}$

2. $\forall(a,b)\in\mathbb{R}^2 |arctan(a)-arctan(b)|\leq|a-b|$

Exercice 10.
Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2(e^{\frac{1}{x}}-e^{\frac{1}{x+1}})$

Exercice 11.
Soit $f(x)=(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$.Montrer que :

1. $f^{(n)}(x)=P_n(x)(1-x^2)^{-n-\frac{1}{2}}$où P_n est un polynome
2. $P_{n+1}-(2n+1)XP_n-n^2(1+X^2)P_{n-1}=0$
3. $(1-X^2)P_n"+(2n-1)XP_n'-n^2P_n=0$
4. $P_n'=n^2P_{n-1}$

Exercice 12.
Soit $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ n fois dérivable.Montrer que :

1. si f s'annule en $(n+1)$points distincts de $[a,b]$ alors $(\exists c\in]a,b[)f^{(n)}(c)=0$
2. si $f(a)=f'(a)=....f^{(n-1)}(a)=f(b)=0$ alors $(\exists c\in]a,b[)f^{(n)}(c)=0$

Exercice 13.
Soit $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ de classe C^2 et $c\in]a,b[$

1. On suppose que $f(a)=f(b)=0$.Montrer que $(\exists d\in]a,b[)f(c)=-\frac{f"(d)}{2}(c-a)(b-c)$.
2. Cas général :Montrer que $(\exists d\in]a,b[)f(c)=\frac{b-c}{b-a}f(a)+\frac{c-a}{b-a}f(b)-\frac{f"(d)}{2}(c-a)(b-c)$.

Exercice 14.
Soit $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ de classe C^2 admettant une dérivée 3^{eme} sur $]a,b[$.
On pose $\varphi(x)=f(x)-f(a)-\frac{x-a}{2}(f'(a)+f'(x))+\frac{(x-a)^3}{12}A$

1. Déterminer A pour que $\varphi(a)=\varphi(b)=0$
2. Montrer que $(\exists c_1\in]a,b[)\varphi'(c_1)=\varphi'(a)=0$
3. En déduire $(\exists c_2\in]a,b[)\varphi"(c_2)=0$
4. En déduire $(\exists c\in]a,b[)f(b)-f(a)=\frac{b-a}{2}(f'a)+f'(b))-\frac{(b-a)^3}{12}f^3(c)$

Exercice 15.

1. Montrer que la fonction φ définie par$\varphi(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & x>0\\ 0 & x\leq 0\end{cases}$ est de classe C^∞.

   (On montrera que $(\forall n\in\mathbb{N})(\exists P_n\in\mathbb{R}[X])(\forall x>0)f^{(n)}(x)=e^{-\frac{1}{x}}P_n(\frac{1}{x})$)
2. En déduire que la fonction f définie par $f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{1-x^2}} & |x|<1\\ 0 & |x|\geq 1\end{cases}$ est de classe C^∞.

Exercice 16.
Montrer que la fonction f définie par $f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.
(On montrera que $(\forall n\in\mathbb{N})(\exists P_n\in\mathbb{R}[X])(\forall x\neq 0)f^{(n)}(x)=\frac{P_n(x)}{x^{3n}}f(x)$)

Exercice 17. ***Théoreme de Darboux***
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et$f:I\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I . Montrer que $f'(I)$ est un intervalle.ie :f'vérifie le théoreme des valeurs intermédiaires .

Exercice 18.
Soit $f:]-a,a[\longrightarrow\mathbb{R}$ avec $a>0$ telle que f est continue en 0 et$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(2x)-f(x)}{x}=0$.
Montrer que fest dérivable en0

Exercice 19.
Montrer que $(\forall x > 1) ln(\frac{x+y}{2}) \geq \sqrt{ln(x)ln(y)}$
considérer $f(x) = -ln(ln(x))$

Exercice 20.
Soit f une convexe sur un intervalle I et f(a) un minimum local de f .Montrer f(a) est un minimum absolu

Exercice 21.
Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$.Montrer que si f est logarithmiquement convexe alors f est convexe.

Exercice 22.
Soit f une fonction convexe sur $\mathbb{R}$.Montrer que si f est bornée alors f est constante

Exercice 23.
Soit f une fonction continue sur]a,b[telle que $(\forall (x,y) \in (]a,b[)^2 f(\frac{x+y}{2}) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}$. Montrer que f est convexe.

Exercice 24. ***Inégalités de Holder etMinkowski***

1. Soit$(p,q) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.Montrer que $\forall (a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$.
2. Montrer que $\forall ((a_i)_{1 \leq i \leq n}, (b_i)_{1 \leq i \leq n}) \in (\mathbb{R}^n)^2 \sum\limits_{k=1}^{n} |a_i b_i| \leq (\sum\limits_{k=1}^{n} |a_i|^p)^{\frac{1}{p}} (\sum\limits_{k=1}^{n} |a_i|^q)^{\frac{1}{q}}$
3. En déduire $\forall ((a_i)_{1 \leq i \leq n}, (b_i)_{1 \leq i \leq n}) \in (\mathbb{R}^n)^2 (\sum\limits_{k=1}^{n} |a_i + b_i|^p)^{\frac{1}{p}} \leq (\sum\limits_{k=1}^{n} |a_i|^p)^{\frac{1}{p}} + (\sum\limits_{k=1}^{n} |a_i|^p)^{\frac{1}{p}}$

Exercice 25. ***Formule de Simpson***
Soit f une fonction impaire et 5 fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Calculer $f(0), f''(0)$et$f^{(4)}(0)$
2. Soit $x > 0$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que $f(x) = \frac{x}{3}(f'(x) + 2f'(0)) - b\frac{x^5}{5!}$.
   Soit g la fonction g définie $g(t) = f(t) - \frac{t}{3}(f'(t) + 2f'(0)) + b\frac{t^5}{5!}$.
   Démontrer que g est 4 fois dérivable et calculer $g^{(i)}(0)$ pour $i = 0, 1, 2, 3$
3. Démontrer que $(\exists \theta \in]0,1[) f(x) = \frac{x}{3}(f'(x) + 2f'(0)) - \frac{x^5}{180} f^{(5)}(\theta x)$