Centre Ibn Abdoune **14/12/07**
Classes Préparatoires **MPSI 1**
Khouribga **ELOUADIH**

Série 8 : Polynômes

Exercice 1.
déterminer

1. $(P,Q) \in (IK[X])^2$ tel que $Q^2 = XP^2$
2. $(P,Q,R) \in (IK[X])^3$ tel que $P^2 - XQ^2 = XR^2$
3. $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(X^2) = (X^2+1)P(X)$
4. $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P - P' = X^n$

Exercice 2.
Déterminer le degré des polynomes suivants :
$P = (X+1)^n - X^n; Q = (X+1)^n - (X-1)^n; R = (X+1)^{2n} - X^{2n} - 2nX - 1$

Exercice 3.
Déterminer l'ordre de multiplicité de 1 de chacun des polynomes suivants :

1. $X^{2n} - nX^{n+1} + nX^{n-1} - 1$
2. $X^{2n+2} - (2n+1)X^{n+1} + (2n+1)X^n - X$
3. $X^{2n} - n^2X^{n+1} + 2(n^2-1)X^n - n^2X^{n-1} + 1$

Exercice 4.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$

1. Calculer le reste de la division euclidienne de X^n par $(X-1)(X-2)$et par $(X-1)^2$
2. Calculer le reste de la division euclidienne de$(Xcos(\theta) + sin(\theta))^n$ parX^2+1
3. Pour quelles valeurs de n le polynome $(X+1)^n - X^n - 1$ est divisible par X^2+X+1

Exercice 5.
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$ effectuer la division euclidienne $(Xcos(\alpha) + sin(\alpha))^n$ par X^2+1

Exercice 6.
Déterminer tous les polynomes divisibles par leur dérivées

Exercice 7.
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynome scindé sur$\mathbb{R}$.Montrer que P' est aussi scindé sur $\mathbb{R}$

Exercice 8.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $P_n = [(X^2-1)^n]^{(n)}$.Montrer que P_n admet n racines distinctes dans $]-1,1[$

Exercice 9.
Soit $P = X^5 - 13X^4 + 67X^3 - 171X^2 + 216X - 108$ .Determiner le pgcd de P etP'et en déduire une factorisation de P en facteurs irréductibles

Exercice 10.
Montrer que les polynomes $A = X^4 + X^3 - 2X + 1$ et $B = X^2 + X + 1$ sont premiers entre eux .Déterminer les coefficients de Bézout

Exercice 11.

1. Montrer que pour tout polynome P,$P(X)-X$ divise $P(P(X))-X$
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :$(x^2-3x+1)^2=3x^2-8x+2$

Exercice 12.
Déterminer la valeur du polynome $P=2X^5-4X^4-2X^3+3X^2-5X-4$ en$1+\sqrt{2}$
(on utilisera la division euclidienne de P par un polynome à coefficients rationnels annulant $1+\sqrt{2}$)

Exercice 13.
Déterminer les polynomes $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(X^2)+P(X)P(X+1)=0$

Exercice 14.
Soit $z_1, z_2, ..., z_n$les racines n^{emes}de l'unité .Prouver que :
$\prod_{k=1}^{n} a+bz_k = a^n+(-1)^{n-1}b^n$ et $\prod_{k=1}^{n}(z_k^2-2z_k cos(\alpha)+1)=2(1-cos(n\alpha))$

Exercice 15.

1. Factoriser $P=(X+1)^n-(X-1)^n$ dans $\mathbb{C}[X]$
2. En déduire que $(\forall p \in \mathbb{N}^*)\ \prod_{k=1}^{p} cotan(\frac{k\pi}{2p+1})=\frac{a}{\sqrt{2p+1}}$ où a est un réel à déterminer

Exercice 16.
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$tel que $(\forall x \in \mathbb{R})P(x) \geq 0$.Montrer que $(\exists (P,Q) \in \mathbb{R}[X]^2)P=Q^2+R^2$

Exercice 17. ***Polynomes d'Euler***

1. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})(\exists! P \in \mathbb{C}[X])P(X+1)+P(X)=2X^n$ Soit$E_n$le polynome correspondant
2. touver une relation entre $E_n^{'}$ et E_{n-1}
3. Développer $E_n(X+h)$sous la forme$\sum a_p E_p(X)$ et en déduire une relation de récurrence entre E_n et les précédents
4. Expliciter E_n pour$n \in \{0,1,2,3,4,5\}$
5. Montrer que$E_n(1-X)=(-1)^n E_n(X)$

Exercice 18.
Résoudre dans $\mathbb{C}^3$ le systeme suivant :

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ xy+xz+yz=-13 \\ xyz=-12 \end{cases}$$

Exercice 19.
Soient n et m deux entiers naturels .Montrer que $X^m-1 \wedge X^n-1 = X^d-1$où $d=m \wedge n$

Exercice 20.
Soit $n \in \mathbb{N}$.Montrer que les racines de $1+X+\frac{X^2}{2}\frac{X^3}{3!}+....\frac{X^n}{n!}$ sont toutes simples.

Exercice 21.
Décomposer en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$et$\mathbb{C}[X]$les polynomes suivants :
$X^3-1; X^3+1; X^4+1; X^4+1; X^4+X^2+1; X^8+X^4+1; X^4+X^3+X^2+X+1; X^6+1$

Exercice 22.
Résoudre dans $\mathbb{C}^3$ le systeme suivant :

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1 \\ x^2+y^2+z^2=-1 \end{cases}$$

Exercice 23.
Résoudre dans $\mathbb{C}^3$ le systeme suivant :

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ x^2+y^2+z^2=6 \\ x^3+y^3+z^3=8 \end{cases}$$

Exercice 24.
Résoudre dans $\mathbb{C}^3$ le systeme suivant :

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ x^4+y^4+z^4=18 \\ x^5+y^5+z^5=30 \end{cases}$$

Exercice 25.
Soit x_1, x_2, x_3 les racines de$X^3 - X + 1$ dans$\mathbb{C}[X]$.
On pose $\omega_1 = x_1 + x_2 + x_3; \omega_2 = x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3; \omega_3 = x_1x_2x_3;$
$\omega_1' = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3; \omega_2' = x_1^3x_2^3 + x_2^3x_3^3 + x_1^3x_3^3; \omega_3' = x_1^3x_2^3x_3^3$

1. calculer$\omega_1', \omega_2', \omega_3'$ en fonction de $\omega_1, \omega_2, \omega_3$puis en déduire leurs valeurs
2. Former le polynome unitaire de degré 3 dont les racines sont x_1^3, x_2^3, x_3^3
3. Déduire $x_1^6 + x_2^6 + x_3^6$

Exercice 26.
Déterminer $n \in \mathbb{N}$ pour lesquels P_n est divisible par P tels que
$P_n = (X^2 - X + 1)^n - X^{2n} + X^n - 1$ et $P = X^2 + 1$

Exercice 27.
soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq n$ et $\theta \in \mathbb{R}$.Montrer que P/P_n où $P_n = X^n sin\theta - X sinn\theta + sin(n-1)\theta$
et $P = X^2 - 2Xcos\theta + 1$

Exercice 28.
Soit Aet B deux polynomes non constants premiers entre eux

1. Montrer que $\exists (U_0, V_0) \in (\mathbb{K}[X])^2 \; AU_0 + BV_0 = 1$
   tels que $deg(U_0) < deg(B)$ et $deg(V_0) < deg(A)$
2. Résoudre dans $(\mathbb{K}[X])^2$: $UA + VB = 1$