Centre Ibn Abdoune — **04/12/07**
Classes Préparatoires — **MPSI 1**
Khouribga — **ELOUADIH**

Série 7 : Arithmétique dans $\mathbb{Z}$

Exercice 1.
Determiner le reste de la division euclidienne de 2^{37} par 13 ;de 3^{41} par 23 ;de 2^{45} par 31

Exercice 2.
Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$: $700x + 429y = 1$

Exercice 3.
Résoudre dans $\mathbb{N}^{*2}$: $\begin{cases} x \wedge y = 18 \\ x \vee y = 540 \end{cases}$: $\begin{cases} x + y = 1008 \\ x \wedge y = 24 \end{cases}$: $x \wedge y + x \vee y = x + y$

Exercice 4.
Soient x, p, q et d des entiers $x > 1$ et $p \wedge q = d$. Montrer que $x^p - 1 \wedge x^q - 1 = x^d - 1$

Exercice 5. *Petit théorème de Fermat*
Soit p un nombre premier

1. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{Z}) p/n^p - n$
2. En déduire que $(\forall n \in \mathbb{Z}) p \nmid n \Longrightarrow p/n^{p-1} - 1$
3. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{Z})\ \frac{n^7}{7} + \frac{n^5}{5} + \frac{23n}{35} \in \mathbb{Z}$

Exercice 6. *Théorème de Wilson*

1. Soit p un nombre premier $p > 2$.Montrer que $(p-1)! + 1$ est divisible par p .
2. Montrer que pour tout entier naturel p si $p/(p-1)! + 1$ alors p est premier

Exercice 7.
Soit p un nombre premier .Montrer que $(\forall n \in \mathbb{Z}) p/n^p + (p-1)!n$

Exercice 8.

1. Soient x et n deux entiers tels que n>0.Montrer que $x + 1/x^{2n+1} + 1$
2. En déduire que si $2^p + 1$ est premier alors $p = 2^q$ avec $q \in \mathbb{N}$
3. Les nombres $2^{2^q}+1$ dits de **Fermat** ne sont pas tous premiers, verifier que $641/2^{32}+1$

Exercice 9.

1. Soient a,p et q des entiers naturels .Montrer que $a^p - 1/a^{pq} - 1$.
2. Montrer que $2^n - 1$ est premier $\Longrightarrow$ n est premier.
3. Les nombres $2^n - 1$ dits de **Mersenne** ne sont pas tous premiers, verifier que $2^{11} - 1$ n'est pas premier.

Exercice 10.
résoudre l'équation dans $\mathbb{Z}^3$: $x^2 + y^2 = z^2$

Exercice 11.
Donner les critéres de divisibilité par 2 ;3 ;4 ;5 ;9 ;11