Centre Ibn Abdoune | **27/11/07**
Classes Préparatoires | **MPSI 1**
Khouribga | **ELOUADIH**

Série 6 : Nombres complexes

Exercice 1.
Soient z_1, z_2et z_3 trois nombres complexes tels que$|z_1| = |z_2| = |z_3|$et$z_1 + z_2 + z_3 = 0$.
Montrer que $z_1^3 = z_2^3 = z_3^3$

Exercice 2.
Soient a et b deux complexes de module 1 et $a \neq b$.Montrer que :$(\forall z \in \mathbb{C})\frac{z+ab\overline{z}-(a+b)}{a-b} \in i\mathbb{R}$

Exercice 3.
calculer pour $n \in \mathbb{N}$ les sommes suivantes :
$A = C_n^0 + C_n^3 + C_n^6 + ..., B = C_n^1 + C_n^4 + C_n^7 + ..., C = C_n^2 + C_n^5 + C_n^8 + ...$

Exercice 4.
Soit $n \in \mathbb{N}^*, (z_1, z_2, ..., z_n) \in (\mathbb{C}^*)^n$.
Montrer que :$|\sum\limits_{k=1}^{n} z_k| = \sum\limits_{k=1}^{n} |z_k| \Longleftrightarrow arg(z_1) \equiv arg(z_2) \equiv ... \equiv arg(z_n)[2\pi]$

Exercice 5.
Soient a et b deux réels et n un entier naturel .Calculer

1. $\sum\limits_{k=0}^{n} cos(a + kb)$ et$\sum\limits_{k=0}^{n} sin(a + kb)$
2. $\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k cos(a + kb)$ et$\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k sin(a + kb)$

Exercice 6.
Soit a un réel et n un entier non nul .

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$l'équation$(z + 1)^n = e^{i2na}$
2. En déduire la valeur de $\prod\limits_{k=0}^{n} sin(a + \frac{k\pi}{n})$

Exercice 7.
Soit n un entier tel que $n \geq 2$et $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$

1. Montrer que $(\forall z \in \mathbb{C}) \prod\limits_{k=1}^{n-1} (z - \omega^k) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} z^k$
2. En déduire que : $\prod\limits_{k=1}^{n-1} sin(\frac{k\pi}{n}) = \frac{n}{2^{n-1}}$

Exercice 8.
Soit $A_k(\omega_k))_{(0 \leq k \leq n-1)}$ les images des racines n^{emes} de l'unité.Déterminer l'ensemble des points M(z) du plan complexe tels que

1. $\| \sum\limits_{k=0}^{n-1} \overrightarrow{MA_k} \| = n$
2. $\sum\limits_{k=0}^{n-1} (MA_k)^2 = 2n$

Exercice 9.
Etudier la suite définie par $u_0 \in \mathbb{C}$ et $u_{n+1} = \frac{1}{3}(2u_n - \overline{u_n})$

Exercice 10.
Etudier la suite définie par $z_0 \in \mathbb{C}$ et $z_{n+1} = \frac{z_n + |z_n|}{2}$

Exercice 11.
Montrer que les points $A(2+4i), B(3-3i), C(4) et D(-1+5i)$ sont cocycliques

Exercice 12.

1. Montrer que :$1 + 2cos(\frac{2\pi}{5}) + 2cos(\frac{4\pi}{5}) = 0$
2. calculer $cos(\frac{2\pi}{5})cos(\frac{4\pi}{5})$
3. Endéduire les valeurs de $cos(\frac{2\pi}{5})$et $cos(\frac{4\pi}{5})$
4. On considéreles points $A(-\frac{1}{4}, 0)$ et $B(0, \frac{1}{2})$.Calculer les abscisses des points d'intersection du cercle de centre A et passant par B avec $(x'Ox)$
5. En déduire une constructionà la régle et au compas d'un pentagone régulier.

Exercice 13.
Déterminer l'ensemble des points M(z) tels que :

1. les points d'affixes z, z^2, z^3 forment un triangle equilatéral.
2. les points d'affixes z, z^2, z^5 sont alignés.
3. les points d'affixes $1, z, 1-z, \frac{1}{z}$ sont cocycliques.

Exercice 14.

Exercice 15.

Exercice 16.

Exercice 17.

Exercice 18.