Centre Ibn Abdoune **02/11/07**
Classes Préparatoires **MPSI 1**
Khouribga **ELOUADIH**

Série 5 : Limites et Continuité

Exercice 1.
Soit f la fonction definie par $f(x)=\begin{cases} 1 : x \in \mathbb{Q} \\ 0 : x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

1. Montrer que f est discontinue en tout point de $\mathbb{R}$
2. Montrer que la fonction g definie par g(x)=xf(x) est continue en un seul point 0

Exercice 2.
Montrer que la fonction $f : x \longrightarrow x^2$ n'est pas uniformement continue sur$\mathbb{R}^+$

Exercice 3.
Montrer que la fonction $f : x \longrightarrow \sqrt{x}$ est uniformement continue sur $\mathbb{R}^+$ mais non lipschitzienne

Exercice 4.
Soit f une fonction uniformement continue sur $\mathbb{R}$ .Montrer que :
$\exists (a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 (\forall x \in \mathbb{R})\ |f(x)| \leq a|x| + b$

Exercice 5.

1. Soit f une fonction continue et admettant des limites finies en $+\infty$ et $-\infty$.Montrer que f est uniformement continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que les fonctions $x \longrightarrow \frac{1}{1+x^2}$ et $x \longrightarrow Arctan(x)$ sont uniformement continues sur $\mathbb{R}$

Exercice 6.
Déterminer tous les endomorphismes de $(\mathbb{R}, +)$ continues en 0

Exercice 7.
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et periodique.Montrer que f est uniformement continue sur $\mathbb{R}$ et que $f(\mathbb{R})$est un segment

Exercice 8.
Soit I un intervalle de n̊on reduit à un point et f une fonction continue et injective.Montrer que f est strictement monotone

Exercice 9.
Montrer que toute fonction T-périodique $(T > 0)$ qui admet une limite finie en $+\infty$ est constante.

Exercice 10.
Montrer que la fonction $f : x \longrightarrow sin(x^2)$ est continue bornée mais non uniformement continue sur $\mathbb{R}$

Exercice 11.
Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$

1. Soit $x \in \mathbb{R}$.Montrer que $\{|y-x|/y \in A\}$admet une borne inférieure que l'on note $d(x, A)$
2. Montrer que l'application $x \longrightarrow d(x, A)$ est 1-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$

Exercice 12.
Soient f et g deux applications continues sur $I = [a, b]$

1. Montrer que les fonctions $sup(f, g)$ et $inf(f, g)$ sont continues sur I
2. Montrer que la fonction $\varphi : t \longrightarrow \sup\limits_{x \in [a,b]} (f(x) + tg(x))$ est lipschitzienne

Exercice 13. ***:Sous groupes de*** $(\mathbb{R}, +)$

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.Montrer que $\alpha\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ sont des sous groupes de $(\mathbb{R}, +)$.
2. Soit H un sous groupe de $(\mathbb{R}, +)$ non réduit à $\{0\}$.On pose $H^+ = H \cap \mathbb{R}_+^*$
   (a) Montrer que H^+admet une borne inferieure $\alpha \geq 0$
   (b) On suppose que $\alpha > 0$
      i. Montrer que $\alpha \in H$ et que $\alpha\mathbb{Z} \subset H$
      ii. Soit $x \in H$ Montrer que $(\exists n \in \mathbb{Z})(n-1)a \leq x < na$
      iii. deduire que $H = \alpha\mathbb{Z}$
   (c) On suppose que $\alpha = 0$ et soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x < y$
      i. Montrer que $(\exists h \in H)$ $0 < h < y - x$
      ii. Montrer que $(\exists n \in \mathbb{Z})$ $x < nh < y$
      iii. Endeduire que H est dense dans $\mathbb{R}$
3. **Applications :**
   (a) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.Montrer que $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ est un sous groupe de $(\mathbb{R}, +)$
   (b) Montrer que $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ est dense $si, etseulementsi, \frac{a}{b} \notin \mathbb{Q}$
   (c) Montrer que $\frac{1}{3}\mathbb{Z} + \frac{1}{5}\mathbb{Z} = \frac{1}{15}\mathbb{Z}$
   (d) Montrer que $\mathbb{Z} + \sqrt{3}\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$
   (e) Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue admettant 1 et$\sqrt{3}$ comme périodes.
   Posons $H = \{x \in \mathbb{R}/f(x) = f(0)\}$
      i. Montrer que $\mathbb{Z} + \sqrt{3}\mathbb{Z} \subset H$
      ii. Montrer que f est constante