Centre Ibn Abdoune **24/10/07**
Classes Préparatoires **MPSI 1**
KHOURIBGA

Série 4 : **Groupes-Anneaux-Corps**

Exercice 1.
On considére la loi $*$ definie dans $\mathbb{R}$ par :$x * y = x + y - xy$

1. etudier l'associativité ,la commutativité et l'existence de l'element neutre .
2. determiner les elements absorbants
3. determiner les elements symétrisables
4. évaluer la puissance n^{eme} : $x * x * ... * x$

Exercice 2.
Soit $(G, .)$ un ensemble muni d'une loi de composition interne associative tel que :
$\forall\ (a, b) \in G^2 \exists (x, y) \in G^2\ ax = b$ et $ya = b$
Montrer que $(G, .)$ est un groupe.

Exercice 3.
Soit $(G, .)$ un ensemble muni d'une loi de composition interne tel que :

1. $(\forall\ (x, y, z) \in G^3\ )(x.y).z = (y.z).x$
2. ($\exists$ e $\in$G)($\forall$ x $\in$ G) $xe = x$
3. ($\forall$ x $\in$ G)($\exists$ x'$\in$ G) $xx' = e$

Montrer que (G,.) est un groupe commutatif.

Exercice 4.
Soit $(G, .)$ un ensemble fini muni d'une loi de composition interne associative pour laquelle tout element est regulier.Montrer que (G,.)est un groupe

Exercice 5.
Soit $(G, .)$ un groupe et H et K deux sous groupes de G .

1. Montrer que H $\cup$ K est un sous groupe de G si et seulement si H$\subset$K ou K$\subset$H
2. Montrer que H $\cup$ K=G $\Longleftrightarrow$H=G ou K=G

Exercice 6.
Soit $(G, .)$ un groupe et H et K deux sous groupes de G.
On note HK={hk/h$\in$H et k$\in$ K}.
Montrer que HK est un sous groupe de G ssi HK=KH

Exercice 7.
Soit (G,.) un groupe tel que ($\forall$ x $\in$ G)$x^2 = e$ Montrer que G est un abelien.

Exercice 8.
Soit(G,.) un groupe.On note Aut(G) l'ensemble des automorphismes de G.

1. Montrer que $(Aut(G), \circ)$ est un groupe.
2. Soit H un sous groupe de $Aut(G)$ et ϕ : G $\longrightarrow$ P(G) définie par :
   ϕ(x)={f(x)/f$\in$H}.

Montrer que $\phi(G)$ est une partition de G.

Exercice 9.
Soit (G,.) un groupe.Pour a de G , on definit l'application ϕ_a :G$\longrightarrow$G par
ϕ_a (x)=axa^{-1}. ϕ_a est appelé automorphisme intérieur associé à a.

1. verifier que ϕ_a est un automorphisme
2. Montrer que l'ensemble des automorphismes intérieurs Int(G) est un sous groupe de(Aut(G),o)
3. Montrer que l'application ϕ :G$\longrightarrow$Aut(G) définie par
   ϕ (x)=$\phi_a$est un mophisme de groupes et determiner son noyau.

Exercice 10. ***:Théoreme de Lagrange***
Soit $(G, .)$ un groupe d'ordre n et H un sous groupe de G d'ordre p.

1. Montrer que la relation définie dans G par $xRy \iff xy^{-1} \in H$ est une relation d'équivalence
2. determiner ses classes et montrer qu'elles sont équipotentes
3. montrer que p divise n

Exercice 11.
Soit $(G, .)$ un groupe et a et b deux elements de G d'ordres respectifs p et q tels que $< a > \cap < b >= \{e\}$ et $ab = ba$.Monter que $ord(ab) = ppcm(p, q)$

Exercice 12.
étudier les lois de composition internes suivantes :

1. $x * y = \frac{x+y}{1+xy} sur] - 1, 1[$
2. $x \perp y$=$x\sqrt{1 + y^2} + y\sqrt{1 + x^2}$ sur $\mathbb{R}$

Exercice 13.
Soit $(G, .)$ un groupe et a un element de G et $n \in \mathbb{N}^*$.Montrer que les proprietes suivantes sont équivalentes :

1. a est d'ordre n
2. $< a >$=$\{e, a, ..., a^{n-1}\}$ avec tous les elements deux à deux distincts.
3. n est le plus petit entier naturel non nul verifiant $a^n = e$
4. $a^k = e \Longleftrightarrow k \in n\mathbb{Z}$
5. l'application φ_a :$\mathbb{Z} \longrightarrow G$ definie par φ_a(k)=a^k est un morphisme de groupes

Exercice 14.
Soit $(G, .)$ un groupe et a un element de G et l'application ϕ_a :G$\longrightarrow$G par
ϕ_a (x)=axa^{-1}.

1. verifier que ϕ_a est un automorphisme de G
2. Soient x et y deux elements de G .Montrer que si xy est d'ordre fini alors yx est d'ordre finiet $ord(xy) = ord(yx)$

Exercice 15.
Soit $(G, .)$ un groupe et a et b deux elements de G d'ordres finis respectifs p et q tels que ab=ba et $\triangle(p, q) = 1$.Montrer que ab est d'ordre fini et que $ord(ab) = pq$.(ind :utiliser l'exercice 11)

Exercice 16.
Soit $(G, .)$ un groupe et A une partie de G et $< A >$ le sous de G engendré par A.

1. rappeler $< \emptyset >$ et $< a >$ où a$\in$ G
2. Montrer que $< A >$ =$\{\prod_{i=1}^{n} a_i / a_i \in$A $\cup$ A^{-1} et n $\in \mathbb{N}^*\}$

3. Montrer que A $\subset$ B$\Longrightarrow < A > \subset < B >$
4. Montrer que si H est un sous groupe de G alors $< H >= H$
5. Montrer que $<< A >>=< A >$.

Exercice 17.
Soit $(G, .)$ un groupe tel que :$\forall$(x,y) $\in G^2 (xy)^2 = x^2y^2$.
Montrer que$(G, .)$ est commutatif.

Exercice 18.
Montrer que tout groupe d'ordre 4 est isomorphe à U_4 ou à $U_2 \times U_2$

Exercice 19.
Montrer que U_8 n'est pas isomorphe à$U_2 \times U_4$

Exercice 20.
Soit $(G, .)$ un groupe et x un element de G d'ordre n.Montrer que ,pour tout m de $\mathbb{Z}$, $y = x^m$ est d'ordre fini et que son ordre est $\frac{n}{d}$ où d=pgcd(n,m).

Exercice 21.
Soit $(A, +, \times)$un anneau et $a \in A$.On dit que a est nilpotent s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $a^n = 0$.Le plus petit entier naturel non nul p tel que $a^p = 0$ est appele l'indice de nilpotence de a.

1. Quels sont les elements nilpotents d'un anneau integre
2. determiner les elements nilpotents de($\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}, +, \times$).
3. Soient a et b deux elements nilpotents de A et qui commutent.Montrer que ab ,$a + b$ et $a - b$ sont nilpotents
4. Monter que si a est nilpotent alors $1 - a$ est inversible

Exercice 22.
Montrer que tout anneau fini integre est un corps.

Exercice 23.
On note $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$={a+b$\sqrt{2}$/(a,b) $\in \mathbb{Q}^2$ }

1. Montrer que $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ est un corps
2. $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ et $\mathbb{Q}[\sqrt{3}]$ sont ils isomorphes ?

Exercice 24.
Montrer que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un corps ssi n est premier.

Exercice 25.
Soit $(A, +, \times)$un anneau et X une partie de A. on pose $C(X)$={a$\in$A/ ($\forall$ x $\in$ X) ax=xa} appelé commutant de X dans A .Montrer que C(X) est un sous anneau de A

Exercice 26. ***Entiers de Gauss***
L'ensemble des entiers de Gauss est$\mathbb{Z}[i]$={a+ib/(a,b) $\in \mathbb{Z}^2$}

1. Montrer que $\mathbb{Z}[i]$ est un anneau de $(\mathbb{C}, +, \times)$
2. Trouver les elements inversibles de $\mathbb{Z}[i]$
3. (a) Montrer que ($\forall$ z $\in \mathbb{C}$) ($\exists z_0 \in \mathbb{Z}[i]$) $|z - z_0| < 1$
   (b) En deduire que ($\forall$ (a,b)$\in \mathbb{Z}[i] \times \mathbb{Z}[i]^*$)($\exists$(q,r)$\in \mathbb{Z}[i]^2$) $a = bq + r$ et $|r| < |b|$
   (c) Le couple (q,r) est-il unique ?

Exercice 27. ***Anneau de Boole***
Soit $(A, +, \times)$un anneau tel que $\forall$ x $\in$A $x^2 = x$

1. Montrer que $\forall\ x \in$A $x+x=0$
2. Montrer que A est commutatif
3. caculer $xy(x+y)$ pour x, y de A
4. donner un exemple d'anneau de Boole

Exercice 28.
Soit $(A,+,\times)$un anneau commutatif et I une partie de A .On dit que $(I,+,\times)$ est un ideal de A si

1. $(\forall (x, y \in I^2)\ x-y \in I$
2. ($\forall$ a $\in$ I)($\forall$ x $\in$ A) ax $\in$ I

On pose N={$x\in$ A/($\exists$n$\in$ $\mathbb{N}^*$)$x^n=0$} Soit I un ideal de A ,
on pose $\sqrt{I}$={$x\in$ A/($\exists$n$\in$ $\mathbb{N}^*$)$x^n \in I$}

1. Montrer que $n\mathbb{Z}$ est un ideal de $\mathbb{Z}$
2. Montrer que N est un ideal de A
3. Montrer que $\sqrt{I}$ est un ideal de A.Determiner $\sqrt{24\mathbb{Z}}$ et $\sqrt{p\mathbb{Z}}$ où p est un nombre premier. determiner $\sqrt{N}$