**Centre Ibn Abdoune** | **25/09/07**
**Classes Préparatoires** | **MPSI 1**
**KHOURIBGA**

# Série 3 : **Nombres réels et Suites numériques**

**Exercice 1.**
Montrer que :

1. $\forall$(a,b)$\in \mathbb{R}_+^2$ $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$
2. $\forall$(a,b)$\in \mathbb{R}^2$ $\sqrt{|a-b|} \geq |\sqrt{|a|} - \sqrt{|b|}|$

**Exercice 2.**
Montrer que

1. ($\forall$ x$\in \mathbb{R}$)( $\forall$ n$\in \mathbb{N}^*$)$[\frac{[nx]}{n}] = [x]$
2. ($\forall$ x$\in \mathbb{R}$)( $\forall$ n$\in \mathbb{N}^*$) $\sum\limits_{k=0}^{n-1}[x+\frac{k}{n}] = [nx]$

**Exercice 3.**
Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$ telle que A est borné et B$\subset$A .Comparer sup(A),inf(A), sup(B) et inf(B)

**Exercice 4.**
Soit A une partie non vide et borné de $\mathbb{R}$ .

1. justifier l'existence du nombre ,appelé diamétre de A,$\delta$(A)$=sup\{|x-y|/(x,y) \in A^2\}$
2. Montrer que $\delta$(A)=sup(A)-inf(A)

**Exercice 5.**
Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$ et majorées

1. Montrer que A+B est majorée et que sup(A+B)=sup(A)+sup(B)
2. Montrer que A$\cup$B est majorée et que sup(A$\cup$B)=max(sup(A),sup(B))
3. on suppose que A$\subset \mathbb{R}_+$ et que sup(B)$\geq$0.montrer que AB est majorée et que sup(AB)=sup(A)sup(B)

**Exercice 6.**
Etudier les ensembles suivants :$\{\frac{1}{n}+(-1)^n/n \in \mathbb{N}^*\}$ ;$\{\frac{x^2}{1+x^2}/x \in \mathbb{R}\}$ ;$\{\frac{xy}{x^2+y^2}/(x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2\}$

**Exercice 7.** ***Inégalités classiques***

1. ($\forall$ x$\in \mathbb{R}^+$)( $\forall$ n$\in \mathbb{N}$) $(1+x)^n \geq 1+nx$
2. ($\forall$ x$\in \mathbb{R}$) $|sinx| \leq |x|$
3. ($\forall$x $\in [0,\frac{\pi}{2}]$)$\frac{2}{\pi}x \leq sinx \leq x$
4. $(\forall x > -1) ln(1+x) \leq x$

**Exercice 8.** ***Suites de Cauchy***
on dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy si :
$(\forall \varepsilon > 0)$( $\exists$ N$\in \mathbb{N}$)$(\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2)$ $p,q \geq N \Longrightarrow |u_p - u_q| \leq \varepsilon$

1. Montrer que toute suite convergente est de Cauchy
2. Montrer que toute suite de Cauchy est bornée

3. Montrer que toute suite de Cauchy admet une sous suite convergente
4. En déduire que toute suite de Cauchy est convergente
5. Montrer que toute suite à valeurs dans $\mathbb{Z}$ et convergente est stationnaire
6. soit $(H_n)_{n\geq 1}$la suite définie par :$H_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

   Montrer que :$(\forall n \geq 1)|H_{2n} - H_n| \geq \frac{1}{2}$.Que peut-on déduire ?

**Exercice 9.** ***Théoreme de Césaro***
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. on pose $v_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} u_k$

1. Montrer que si$(u_n)$converge vers l$\in \mathbb{R}$ alors $(v_n)$converge vers l
2. la réciproque est -t-elle vraie ?
3. Montrer que le résultat reste vrai pour $l = +\infty$
4. **Applications :**
   (a) Montrer que $u_{n+1} - u_n \longrightarrow l \Longrightarrow \frac{u_n}{n} \longrightarrow l$
   (b) Montrer que : $\left\{\begin{array}{l} u_n \longrightarrow l \\ (\forall\ n \in \mathbb{N}\ )\ (u_n > 0) \end{array}\right. \Longrightarrow \sqrt[n]{u_0 u_1 \ldots. u_{n-1}} \longrightarrow l$
   (c) Montrer que $\left\{\begin{array}{l} \frac{u_{n+1}}{u_n} \to l \\ (\forall\ n \in \mathbb{N}\ )\ (u_n > 0) \end{array}\right. \Longrightarrow \sqrt[n]{n} \longrightarrow l$
   (d) determiner les limites suivantes : $\lim \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{kn}$ ;$\lim \sqrt[n]{n^3 + n^2 - 1}$ ;$\lim \sqrt[n]{C_{2n}^n}$ ;$\lim \sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}}$

**Exercice 10.**
soit $(H_n)_{n\geq 1}$la suite définie par :$H_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

1. Montrer que $(\forall\ n \geq 1)\frac{1}{n+1} \leq$ ln(n+1)-ln(n) $\leq \frac{1}{n}$
2. en déduire un équivalent de $H_n$
3. montrer que la suite $u_n = H_n - ln(n)$ est décroissante et qu'elle est convergente

**Exercice 11.**
Montrer que toute suite convergente et periodique est constante

**Exercice 12.**
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles définies par $\left\{\begin{array}{l} u_0 = 0; v_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{2u_n + 3v_n}{5}\ ;v_{n+1} = \frac{3u_n + 2v_n}{5} \end{array}\right.$

determiner la nature de $(u_n + v_n)et(|u_n - v_n|)$

deduire alors que $(u_n)$ et $(v_n)$ sont convergentes et donner leurs limites

**Exercice 13.**
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $(u_{2n})(u_{2n+1})(u_{n^2})convergent.$
$Montrerque(u_n)converge$

**Exercice 14.**
calculer les limites des suites suivantes :
$u_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$ ;$u_n = \sum\limits_{k=0}^{2n+1} \frac{n}{n^2+k^2}$ ;$u_n = \frac{1}{n^2}\sum\limits_{k=1}^{n}[kx]$ ;$u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$ ; $\prod\limits_{k=1}^{n}(1 + \frac{k}{n^2})$

**Exercice 15.**
Est-ce vrai ou faux ? justifier

1. $u_n \sim v_n \Longrightarrow e^{u_n} \sim e^{v_n}$
2. $u_n \sim v_n \Longrightarrow ln(u_n) \sim ln(v_n)$

3. $u_n \sim v_n et u'_n \sim v'_n \Longrightarrow u_n + u'_n \sim v_n + v'_n$

**Exercice 16.**
Montrer que (cos(n)) et (sin(n)) n'ont pas de limite

**Exercice 17.**
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que (u$_{2n})(u_{2n+1})(u_{3n}) convergent.$
$Montrerque(u_n)converge$