Centre Ibn Abdoune **25/09/07**
Classes Préparatoires **MPSI 1**
KHOURIBGA

Série 2 : **Entiers naturels**

Exercice 1. Montrer que :$\forall n \in \mathbb{N}$: $\sum\limits_{k=0}^{n} kk! = (n+1)! - 1$; $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$.

Exercice 2. *calculer les sommes suivantes :*
$\sum\limits_{k=0}^{n} k^2(n+1-k)$; $\sum\limits_{k=0}^{n} k^2(k+1)$; $\sum\limits_{1\leqslant i\prec j\leq n} ij$; $\sum\limits_{1\leqslant i,j\leq n} inf(i,j)$

Exercice 3. *Montrer que :*

1. $\forall$ $n \in \mathbb{N}$-{0,1} $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \succ \frac{3n}{(2n+1)}$
2. $\forall$ $n \in \mathbb{N}^*$ $4^n(n!)^3 \prec (n+1)^{3n}$
3. $\forall$ $n \in \mathbb{N}$ $\prod\limits_{k=o}^{n} (2k+1)! \geqslant ((n+1)!)^{n+1}$

Exercice 4. *Soit E un ensemble.Montrer que :E est fini si et seulement si $\mathcal{P}$(E) est fini*

Exercice 5. *trouver toutes les applications strictement croissantes f :$\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ telles que : f(2)=2 et $\forall(p,q) \in \mathbb{N}^2$ f(pq)=f(p)f(q)*

Exercice 6. *Etablir que l'application f :$\mathbb{N}\times\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}(x,y)\longmapsto$ $\frac{(x+y)(x+y+1)}{2}+x$ est bijective*

Exercice 7. *calculer les sommes suivantes :*$\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)} C_k^n$;$\sum\limits_{k=0}^{n} kC_n^k$;$\sum\limits_{k=n}^{k} (C_n^k)^2$;

Exercice 8. *determiner le coefficient de x^{17} dans le developpement de $(1+x^5+x^7)^{20}$*

Exercice 9. *Soit E un ensemble fini de cardinal n .Quel est le nombre de couples (X, Y) de$(\mathcal{P}(E))^2$ tels que X$\subset$Y*

Exercice 10. *Soit E un ensemble fini de cardinal n .Quel est le nombre de couples (X, Y) de$(\mathcal{P}(E))^2$ tels que X$\cup$Y=E*

Exercice 11. *Determiner le nombre de surjections de $\|1, n+1\|$ dans $\|1, n\|$*

Exercice 12. *Soit E un ensemble fini de cardinal $n \geq 1$.denombrer :*

1. *relations binaires de E*
2. *relations binaires reflexives de E*
3. *relations binaires symetriques de E*

Exercice 13. *Pour (n,p)$\in \mathbb{N}^2$: on pose* $S_p(n) = \sum\limits_{k=0}^{n} k^p$

1. *Montrer que :$\forall$(n,p)$\in\mathbb{N}^2$* $S_{p+1}(n+1) = \sum\limits_{k=0}^{p+1} C_{p+1}^k S_k(n)$
2. *En deduire que :$\forall$(n,p)$\in\mathbb{N}^2$* $(n+1)^{p+1} = \sum\limits_{k=0}^{p} C_{p+1}^k S_k(n)$

3. *trouver les valeurs des sommes classiques :* $\sum\limits_{k=1}^{n} k$; $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2$; $\sum\limits_{k=1}^{n} k^3$

Exercice 14. *on appelle dérangement d'un ensemble fini de cardinal n toute bijection f de E sur E telle que* $\forall$ $x \in E$ $f(x) \neq x$ *. Soit* D_n *le nombre de dérangements de E .*

1. *Montrer que* $n! = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k D_k$
2. *Soient f,g :* $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ *telles que* $\forall$ $n \in \mathbb{N}$ *:*$g(n) = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k f(k)$
   (a) *Montrer que :*$\forall n \in \mathbb{N}$ *:*$f(n) = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} C_n^k g(k)$
   (Formule d'inversion de Pascal)
   (b) *En déduire que :* $\forall$ $n \in \mathbb{N}$ *:*$D_n = n!\ \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$
3. *Etablir que :*$(\forall\ x \in \mathbb{R})(\ \forall\ n \in \mathbb{N})$ $e^x = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(x)^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t dt$
4. *en deduire que lim* $\frac{D_n}{n!} = \frac{1}{e}$

Exercice 15. *Soit E un ensemble de cardinal n .*

1. *calculer* $\sum\limits_{A} cardA$
2. *Soit* $F \subset E$ *tel que card* $F=k$
   (a) *donner le nombre de couples* (X,Y) *de*$(\mathcal{P}(E))^2$ *tels que* $X \cap Y = F$
   (b) *En deduire* $\sum\limits_{(X,Y) \in (\mathcal{P}(E))^2} card(X \cap Y)$

Exercice 16. *Soit* $(A_k)_{k=1}n$ *une famille d'ensembles finis .Montrer que :*

$$Card(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) = \sum_{i=1}^{n} cardA_i - \sum_{1 \leq i \prec j \leq n} card(A_i \cap A_j) + \sum_{1 \leq i \prec j \prec k \leq n} card(A_i \cap A_j \cap A_k) + ... + (-1)^{n-1} card(\bigcap_{i=1}^{n} A_k)$$