Centre Ibn Abdoune **12/09/07**
Classes Préparatoires **MPSI 2**
KHOURIBGA

Série: **Ensembles et Applications**

Exercice 1. *soit A,B et C trois ensembles .montrer que :*

1. $A\cup B = A\cap C \Longleftrightarrow B \subset A \subset C$
2. $A\cup B = A\cup C$ *et* $A\cap B = A\cap C \Longleftrightarrow B=C$
3. $A\Delta B = A\Delta C \Longleftrightarrow B=C$

Exercice 2. *soit E et F deux ensembles.Montrer que :*
$P(E)=P(F) \Longleftrightarrow E=F$

Exercice 3. *Soit E un ensemblle et A et B deux parties de E .Resoudre dans* $P(E)$ *les equations suivantes :*

1. $A\cup X = B$
2. $A\cap X = B$
3. $A\Delta X = B$

Exercice 4. *Soit* $f : E \longrightarrow F$ *une application .Montrer les equivalences suivantes :*

1. *f injective* $\Longleftrightarrow \forall (A,B)\in P(E)^2\ f(A\cap B)=f(A)\cap f(B)$.
2. *f bijective* $\Longleftrightarrow \forall\ A\in P(E) f(\overline{A})=\overline{f(A)}$.
3. *f surjective* $\Longleftrightarrow \forall\ B\in P(F)\ f(f^{-1}(B))=B$.
4. *f injective* $\Longleftrightarrow \forall\ A\in P(E)\ f^{-1}(f(A))=A$.

Exercice 5. *Montrer qu'il n'existe pas de surjection de E sur* $P(E)$

Exercice 6. *Soit* $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ *telle que* $f(n)=2n$
et $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ *telle que* $g(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ \frac{n-1}{2} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$

1. *etudier l'injectivité,la surjectivité et la bijectivité de f et g*
2. *determiner fog et gof*

Exercice 7. *Soit E un ensemble et A et B deux parties de E.*
$f : P(E) \longrightarrow P(A)\times P(B)$
$X \longmapsto (X\cap A, X\cap B)$.
donner une condition necessaire et suffisante pour que :

1. *f soit injective*
2. *f soit surjective*
3. *f soit bijective et determiner* f^{-1}

Exercice 8. *soient* f *:E*$\longrightarrow$*F et* g *:F*$\longrightarrow$*E deux applications telles que fogof soit bijective*

1. *montrer que* f *est bijective*
2. *en déduire que* g *est bijective*

Exercice 9. *Soit* f *:E*$\longrightarrow$*F une application telle que* $fofof = f$*.Montrer que* f *est injective si et seulement si* f *est surjective*

Exercice 10. ***ordre lexicographique***
Soient (E,≤)et (F,≤) deux ensembles ordonnées,on definit sur E×F la relation £ définie par :

$$\forall((x.y),(x',y'))\in(E\times F)^2 \ (x.y)\ \pounds(x',y')\Longleftrightarrow\begin{cases} x<x' \\ ou \\ x = x' et y\leq\ y' \end{cases}$$

1. *Montrer que £ est une relation d'ordre sur E×F*
2. *Montrer que £ est total si les ordres de E et F sont totaux*
3. *on prend E=F=*$\mathbb{R}$ *muni de l'ordre usuel .Préciser pour (x,y)*$\in\mathbb{R}^2$ *l'ensemble des majorants de* $\{(x,y)\}$*dans* $\mathbb{R}^2$ *pour £*