Complexe Chourouk **25/03/2020**

1SM

Khouribga **ELOUADIH**

Série 13: Arithmétique

Exercice 1

1. Determiner le reste de la division euclidienne de 2^{37} par 13 et de 3^{41} par 23
2. Determiner le reste de la division euclidienne de 2^{45}par 31 et de 8^{2017} par 5
3. Determiner le reste de la division euclidienne de 33^{38} par 7

Exercice 2
Montrer que $11/2^{123}+3^{121}$ et que $(\forall n\in\mathbb{N})7\nmid 2^n+3^n+5^n$

Exercice 3

1. Montrer que $(\forall n\in\mathbb{N})10^{3n}\equiv 1[37]$
2. Déterminer le reste de la division euclidienne de $10^{10}+10^{20}+10^{30}$ par 37

Exercice 4
Resoudre dans $\mathbb{Z}$

1. $x-1/x+3$
2. $x+2/x^2+2$
3. $x-3/x^3-3$

Exercice 5
Soit p un nombre premier Montrer que $\overline{x}\times\overline{y}=\overline{0}\Leftrightarrow\overline{x}=\overline{0}$ ou $\overline{y}=\overline{0}$ dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$

Exercice 6

1. Résoudre dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$: $\overline{3}x^2-x-\overline{2}=\overline{0}$
2. Résoudre dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$: $x^2-\overline{3}x+\overline{2}=\overline{0}$
3. Résoudre dans $\mathbb{Z}$: $2x^2-3x-2\equiv 0[7]$
4. Résoudre dans $\mathbb{Z}$: $x^2-2x-2\equiv 0[5]$

Exercice 7
Montrer que

1. $(\forall n\in\mathbb{N})(n!+1)\wedge((n+1)!+1)=1$
2. $(\forall n\in\mathbb{Z})(21n+4)\wedge(14n+3)=1$
3. $(\forall n\in\mathbb{N}^*)(n^4+3n^2+1)\wedge(n^3+2n)=1$

Exercice 8

1. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$: $700x + 429y = 1$
2. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$: $51x + 44y = 1$
3. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$: $151x - 77y = 5$
4. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$: $700x + 429y = 1$
5. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$: $442x + 495y = 1$
6. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$: $192x + 39y = 192 \wedge 39$

Exercice 9
Résoudre dans $\mathbb{N}^{*2}$:

1. $\begin{cases} x \wedge y = 18 \\ x \vee y = 540 \end{cases}$
2. $\begin{cases} x + y = 1008 \\ x \wedge y = 24 \end{cases}$
3. $x \wedge y + x \vee y = x + y$
4. $\begin{cases} xy = 1512 \\ x \vee y = 252 \end{cases}$
5. $\begin{cases} xy = 300 \\ x \vee y = 60 \end{cases}$
6. $x \vee y - x \wedge y = 187$
7. $\begin{cases} x + y = 276 \\ x \vee y = 1440 \end{cases}$
8. $\begin{cases} x + y = 1008 \\ x \wedge y = 24 \end{cases}$
9. $x \vee y - 3x \wedge y = 108$ et $10 \prec x \wedge y \prec 15$
10. $\begin{cases} x + y = 100 \\ x \wedge y = 10 \end{cases}$
11. $\begin{cases} x \wedge y = 5 \\ x \vee y = 60 \end{cases}$

Exercice 10 ***Théorème des restes chinois***
Résoudre dans $\mathbb{Z}$:

1. $\begin{cases} x \equiv 4[6] \\ x \equiv 2[11] \end{cases}$
2. $\begin{cases} x \equiv 0[289] \\ x \equiv 1[361] \end{cases}$
3. $\begin{cases} x \equiv 1[8] \\ x \equiv 2[5] \end{cases}$

Exercice 11 ***Petit théorème de Fermat***
Soit p un nombre premier

1. Montrer que $(\forall k \in \{1, ...p\}) p / C_p^k$
2. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{Z}) p / n^p - n$

3. En déduire que $(\forall n \in \mathbb{Z}) p \nmid n \Longrightarrow p / n^{p-1} - 1$
4. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{Z})\ \frac{n^7}{7} + \frac{n^5}{5} + \frac{23n}{35} \in \mathbb{Z}$

Exercice 12
Résoudre dans $\mathbb{Z}/449\mathbb{Z}$ puis dans $\mathbb{Z}/143\mathbb{Z}$: $x^3 = x$

Exercice 13

1. Résoudre dans $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$: $x^2 = \overline{0}$ où p est premier
2. Résoudre dans $\mathbb{Z}/49\mathbb{Z}$: $x^2 + \overline{16}x + \overline{15} = \overline{0}$

Exercice 14
Déterminer $(2^{n+2} - 2^n) \wedge (3^{n+2} - 3^n)$: $(n \in \mathbb{N})$

Exercice 15
Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) 2^n + 3^n \wedge 2^{n+1} + 3^{n+1} = 1$

Exercice 16

1. Soient x et n deux entiers tels que n>0.Montrer que $x + 1 / x^{2n+1} + 1$
2. En déduire que si $2^p + 1$ est premier alors $p = 2^q$ avec $q \in \mathbb{N}$
3. Les nombres $2^{2^q} + 1$ dits de **Fermat** ne sont pas tous premiers, vérifier que $641 / 2^{32} + 1$

Exercice 17

1. Soient a,p et q des entiers naturels .Montrer que $a^p - 1 / a^{pq} - 1$.
2. Montrer que $2^n - 1$ est premier $\Longrightarrow$ n est premier.
3. Les nombres $2^n - 1$ dits de **Mersenne** ne sont pas tous premiers, vérifier que $2^{11} - 1$ n'est pas premier.

Exercice 18
Donner les critères de divisibilité par 2 ;3 ;4 ;5 ;9 ;11

Exercice 19 *Soit a et b premiers entre eux.*
Montrer que $a \wedge a + b = b \wedge a + b = 1$ puis $a + b \wedge ab = 1$.

Exercice 20 ***Théorème chinois des restes***
Une bande de 17 pirates s'est emparée d'un butin composé de pièces d'or d'égale valeur. Ils décident de se les partager également, et de donner le reste au cuisinier chinois. Celui-ci recevrait alors 3 pièces. Mais les pirates se querellent, et six d'entre eux sont tués. Le cuisinier recevrait alors 4 pièces. Dans un naufrage ultérieur, seuls le butin, six pirates et le cuisinier sont sauvés, et le partage donnerait alors 5 pièces d'or à ce dernier. Quelle est la fortune minimale que peut espérer le cuisinier quand il décide d'empoisonner le reste des pirates ?

Exercice 21

Exercice 22

Exercice 23

Exercice 24

Exercice 25

Exercice 26

Exercice 27

Exercice 28

Exercice 29

Exercice 30