

**Série10: Dérivabilité**

**Exercice 1**

Etudier la dérivabilité de  $f$  en  $x_0$  et donner l'équation de la tangente au point

$M_0(x_0, f(x_0))$

$f(x) = x^2 + 3x - 1; x_0 = 1;$

$f(x) = x - \frac{1}{x}; x_0 = \sqrt{3};$

$f(x) = \frac{1-\cos(x)}{x} \text{ si } x \neq 0 \text{ et } f(0) = 0; x_0 = 0$

$f(x) = x^2; x_0 = 3; f(x) = \sqrt{x}; x_0 = 1; f(x) = \sqrt{x}; x_0 = 0; f(x) = |x|; x_0 = 0;$

$f(x) = x\sqrt{x}; x_0 = 0; f(x) = (x-1)\sqrt{1-x^2}; x_0 = -1; f(x) = (x-1)\sqrt{1-x^2}; x_0 = 1.$

**Exercice 2**

Soit  $f(x) = \frac{1}{x+1}$ . Donner une valeur approchée de  $f(1,01)$  et  $f(0,99)$

**Exercice 3**

Etudier la dérivabilité de  $f$  à droite et à gauche en  $x_0$  et donner l'équation de la tangente au point  $M_0(x_0, f(x_0))$

$f(x) = x^2 + 3|x-1|; x_0 = 1; f(x) = \begin{cases} x^2 + x : x \geq 1 \\ \frac{2}{2-x} : x < 1 \end{cases} \quad x_0 = 1 \quad f(x) = \begin{cases} \cos(2x) : x \geq 0 \\ \cos(x) + \sin(x) : x < 0 \end{cases} \quad x_0 = 0$

**Exercice 4**

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

$f(x) = 4x^3 - 3x^2 + x - 7; f(x) = \frac{4x-1}{7x+2}; f(x) = \frac{x}{x^2-3}; f(x) = 6\sqrt{x}; f(x) = 4\sin x + \cos(2x); f(x) = \cos(-2x+5); f(x) = \sin 2x; f(x) = (2x-5)^4; f(x) = \sqrt{4x^2-3}; f(x) = \left(\frac{4x-1}{x+23}\right)^4$

**Exercice 5**

Calculer les limites suivantes :

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 10x + 4}{x - 2}; \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin(x)}{x - \pi}; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3\tan(x) - \sqrt{3}}{6x - \pi}; \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^{17} - 17x + 15}{x - 1}$

**Exercice 6**

Soit  $f$  une fonction dérivable à droite et à gauche en  $a \in \mathbb{R}$ .

Calculer  $f'_s(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}$  (dérivée symétrique en  $a$ )

**Exercice 7**

Étudier les variations des fonctions suivantes :

$f(x) = x^3 - 3x; f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}; f(x) = \frac{x}{x^2+1}$   
 $f(x) = \sqrt{x^2-x}; f(x) = x - \cos(x); f(x) = x + \frac{4}{x}$

**Exercice 8 ♣**

Calculer les dérivées  $n^{me}$  de :

$$\frac{1}{x-a}; \frac{1}{x^2-1}, \cos(x); \sin(x)$$

**Exercice 9**

Résoudre les équations différentielles suivantes :

$$y'' + y = 0; y'' + 5y = 0; y'' + 4y = 0; y'' + 9y = 0; 5y'' + 2y = 0; y'' + y = 0; y'' + y = 0$$

**Exercice 10**

Résoudre les équations différentielles suivantes :

$$\begin{cases} y'' + 9y = 0 \\ y(0) = 1; y'(0) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y'' + 4y = 0 \\ y(\pi) = 1; y'(\pi) = 1 \end{cases}$$

**Exercice 11**

Soit un rectangle de surface  $64m^2$ . Calculer ses dimensions pour que son diamètre soit maximal

**Exercice 12**

Montrer que :

$$\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}] x - \frac{x^3}{6} \leq \sin(x) \leq x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$$

$$\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}] 1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos(x) \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$$

Calculer la limite suivante :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - x}{x^3}$$

**Moi, je ne perds jamais. Sois je gagne, sois j'apprends. Nilsson Mandela**