Complexe Chourouk **31/01/2020**

1SM

Khouribga **ELOUADIH**

Série9: Limites et Continuité

Exercice 1

Calculer les limites suivantes et montrer le par la définition

$\lim_{x\to 3} x^2-3x$; $\lim_{x\to 1} x^2-5x+4$; $\lim_{x\to +\infty} 4x-7$; $\lim_{x\to +\infty} \sqrt{2x^2-3}$; $\lim_{x\to +\infty} \frac{x^3+3x}{x^2+1}$

Exercice 2

Calculer les limites suivantes :

$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^5-3x^2}{-5x^2+1}$; $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-3x+1}{x-3}$; $\lim_{x\to 2} \frac{x^3-3x+2}{x-2}$; $\lim_{|x|\to +\infty} \sqrt{x^2+1}+x$;

$\lim_{x\to +\infty} \sqrt{x+1}-\sqrt{x}$; $\lim_{|x|\to +\infty} \sqrt{x^2-x+1}-2x$

$\lim_{x\to x_0} \frac{3x^2-7x+2}{x^2-1}$ avec $x_0 \in \{1,-1,\infty\}$; $\lim_{x\to \infty} \frac{x^2+7}{x^3-3x+1}$

$\lim_{x\to x_0} \frac{x^2-x}{x^2-1}$ avec $x_0 \in \{1,-1,\infty\}$; $\lim_{x\to x_0} \frac{2x^3-x-1}{3x^2-5x+2}$ avec $x_0 \in \{1,-1,\infty\}$

$\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x^2-5x+4}$; $\lim_{x\to 5} \frac{x-5}{\sqrt{2x-1}-3}$; $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2}}{x}$; $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{x+1}{\sqrt{x}}$

$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}-x}$; $\lim_{|x|\to \infty} \frac{x-\sqrt{x+2}}{x^2-\sqrt{x^4+1}}$

$\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x+5}-3}{x-4}$; $\lim_{x\to +\infty} \frac{x}{\sqrt{x+1}} - \frac{x}{\sqrt{x+2}}$; $\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x+7}-3}$; $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$

$\lim_{|x|\to \infty} 2x-1-\sqrt{4x^2-4x-3}$; $\lim_{x\to \infty} \sqrt{x^2-4x+3}-\sqrt{x^2-3x+2}$

Exercice 3

$\lim_{x\to +\infty} E(x)$; $\lim_{x\to +\infty} \frac{E(x)}{x}$; $\lim_{x\to 0} \frac{E(x)}{x}$

Exercice 4

$\lim_{x\to 0} \frac{3\tan(x)-sin(x)}{x}$; $\lim_{x\to 0} \frac{x-sin(x)}{x+sin(x)}$; $\lim_{x\to 0} \frac{1-cos(x)}{sin^2(x)}$; $\lim_{x\to 0} \frac{1-cos(3x)}{tan^2(2x)}$

$\lim_{x\to 0} \frac{tan(x)--sin(x)}{x^3}$; $\lim_{x\to 0} \frac{-cos(x)+sin^2(x)+1}{x^2}$; $\lim_{x\to 0}$; $\lim_{x\to 0} \frac{tan(x)+tan(2x)}{tan(x)-tan(2x)}$

$\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{sin(x)-cos(x)}{sin(4x)}$; $\lim_{x\to \frac{\pi}{6}} \frac{sin(6x)}{2cos(x)-\sqrt{3}}$; $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{tan(x)}{sin(2x)-1}$; $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{tan(x)}{sin(2x)-1}$;

$\lim_{x\to \frac{\pi}{3}} \frac{sin(x)-\sqrt{3}}{\sqrt{3}cos(2x)+sin(2x)}$; $\lim_{x\to +\infty} \frac{sin(x)}{x}$; $\lim_{x\to \pi} \frac{1+cos(x)}{(x-\pi)^2}$

Exercice 5

Montrer que f admet un prolongement par continuité en x_0 :

$f(x) = \frac{2x^{17}-17x+15}{x-1}; x_0 = 1$
$f(x) = \frac{2tan(x)-sin(x)}{x}; x_0 = 0$

Exercice 6
Étudier la continuité des fonctions suivantes :
$x \to E(x); x \to E(x)sin(\pi x); x \to E(x) + (x - E(x))^2$

Exercice 7 ♣
Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 1 : x \in \mathbb{Q} \\ -1 : x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

1. Montrer que f n'est pas continue en aucun point de $\mathbb{R}$
2. Montrer que $|f|$ est continue sur $\mathbb{R}$

Exercice 8

1. Montrer que si une fonction T-périodique admet une limite finie en $+\infty$ alors f est constante
2. Montre que sin et cos n'ont pas de limites en $+\infty$

Exercice 9
Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} - ax$ où a est un paramètre
Calculer $\lim\limits_{|x| \to +\infty} f(x)$

Exercice 10
Calculer $\lim\limits_{x \to 0} \frac{sin(sin(x))}{x}; \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{cos(2x) - cos(3x)}}{x}$

Exercice 11
$\lim\limits_{|x| \to +\infty} \sqrt{\sqrt{x^4 - x^3}} - x$

Exercice 12
$\lim\limits_{x \to a} \frac{sin(x) - sin(a)}{cos(x) - cos(a)}; \lim\limits_{x \to a} \frac{xsin(a) - asin(x)}{x - a}$

Exercice 13 *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que :*

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x + y) = f(x) + f(y)$$

On pose $a = f(1)$.

1. *Montrer que : $\forall x \in \mathbb{Q}, f(x) = ax$*
2. *Montrer que : f continue en $0 \Leftrightarrow f$ est continue sur $\mathbb{R}$*