Complexe Chourouk **29/11/2019**

1SM

Khouribga **ELOUADIH**

Série5: Produit Scalaire

Dans tout ce qui suit, le plan $(\mathcal{P})$ est rapporté à un repére orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$

Exercice 1

Calculer $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$dans les cas suivants :

1. $\|\overrightarrow{u}\| = 3$ et$\|\overrightarrow{v}\| = 1$ et $\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}} = \frac{11\pi}{6}$
2. $\|\overrightarrow{u}\| = 2$ et$\|\overrightarrow{v}\| = 5$ et $\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}} = \frac{2\pi}{3}$
3. $\|\overrightarrow{u}\| = 1$ et$\|\overrightarrow{v}\| = 3$ et $\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}} = \frac{7\pi}{6}$

Exercice 2

Determiner $\alpha = (\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}})$ dans chacun des cas

1. $\|\overrightarrow{u}\| = 3$ et$\|\overrightarrow{v}\| =$ et $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 3\sqrt{3}$
2. $\|\overrightarrow{u}\| = 1$ et$\|\overrightarrow{v}\| = 2$ et $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = -1$
3. $\|\overrightarrow{u}\| = 4\sqrt{3}$ et$\|\overrightarrow{v}\| = 2$ et $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = -12$

Exercice 3

Soit (ABCD) un carré de coté $\sqrt{3}$,E un point de [AB] tel que $(\widehat{ADE}) = \frac{\pi}{6}$

1. Montrer que $DE = 2$
2. Montrer que $\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{DA} = 3$ et $\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{AE} = \sqrt{3}$
3. Calculer $\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{DE}$
4. En déduire $\cos(\widehat{BDE})$

Exercice 4

Déterminer m pour que $\overrightarrow{u} = 2\overrightarrow{i} + m\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{v} = -\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j}$ soient orthogonaux

Exercice 5

On considére les points $A(1, -3), B(3, 7)$et$C(-3, 1)$

1. Caculer AB ,AC et BC
2. (ABC) est-il un triangle rectangle ?
3. Calculer l'aire de (ABC)

Exercice 6

Soit θ une mesure de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}})$ Calculer $sin(\theta)$ et $cos(\theta)$ dans les cas suivants :

1. $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{i} - 3\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{v} = -3\overrightarrow{i} - 4\overrightarrow{j}$

2. $\overrightarrow{u} = 3\overrightarrow{i} + 4\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{v} = -\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$
3. $\overrightarrow{u}(0,1)$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{i} + \sqrt{3}\overrightarrow{j}$

Exercice 7
Déterminer l'équation de la droite (D) passant par $A(1,3)$ et perpendiculaire à $(\Delta) : 2x - 3y + 4 = 0$

Exercice 8
Déterminer l'équation de la droite (D) passant par $A(-1,1)$ et perpendiculaire à $(\Delta) : \begin{cases} x = 1 - 2t, \\ y = 2 + 3t, \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$

Exercice 9
Calculer $d(A,(D))$ où :

1. $A(2,-1)$ et $(D) : x - 2y + 3 = 0$
2. $A(0,0)$ et $(D) : 3x - 2y + 3 = 0$
3. $A(0,-1)$ et $(D) : -2y + 3 = 0$

Exercice 10
Soit (D) la droite d'équation $3x + 4y + 5 = 0$

1. Déterminer H la projection orthogonale de O sur (D)
2. Calculer $d(O,(D))$
3. Déterminer O' le symétrique de O par rapport à (D)

Exercice 11
On considére les droites $(D) : 3x - 4y + 2 = 0$ et $(D') : 4x - 3y - 1 = 0$
Déterminer l'ensemble des M équidistants de (D) et (D')

Exercice 12
Déterminer l'équation cartésienne du cercle de centre Ωet de rayon R

1. $\Omega(2,3), R = 2$
2. $\Omega(1,-2), R = 1$
3. $\Omega(-1,0), R = 2\sqrt{3}$

Exercice 13
Déterminer l'équation cartésienne du cercle de centre $\Omega(2,3)$et passant par $A(-4,-1)$

Exercice 14
Déterminer l'équation cartésienne du cercle de diamétre [A,B] où :

1. $A(3,5), B(-1,1)$
2. $A(0,3), B(-1,3)$

Exercice 15
Déterminer (Γ) l'ensemble des M(x,y)tels que :

1. $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$
2. $x^2 + y^2 - 6x + 9 = 0$
3. $x^2 + y^2 + 6x - 4y + 16 = 0$

4. $2(x^2+y^2)-2x+4y+1=0$
5. $x^2+y^2+x+4y+5=0$
6. $3(x^2+y^2)-2y=0$
7. $x^2+y^2+x+3y-3m+5=0$
8. $x^2+y^2-2x-2y+m^2-1=0$

Exercice 16
Donner une représentation paramétrique de $(\mathcal{C})$ dans les cas suivants :

1. $x^2+y^2+2x-6y-6=0$
2. $x^2+y^2-4x-16=0$
3. $x^2+y^2+6x-4y+9=0$

Exercice 17
Déterminer la position de A par rapport à $(\mathcal{C})$

1. $(\mathcal{C}) : x^2+y^2+2x-6y-6=0$ et $A(1,1)$
2. $(\mathcal{C}) : x^2+y^2-4x-16=0$ et $A(0,0)$
3. $(\mathcal{C}) : x^2+y^2+6x-4y+9=0$ et $A(2,3)$

Exercice 18
Déterminer l'équation du cercle de centre Ω et tangent à (D) dans les cas suivants :

1. $\Omega(1,1); (D) : 3x+4y-12=0$
2. $\Omega(5,1); (D) : 3x+4y+12=0$
3. $\Omega(3,4); (D) : x+y-2=0$

Exercice 19
Vérifier que $A \in (\mathcal{C})$ et donner l'équation de la tangente au cercle $(\mathcal{C})$ en A dans les cas suivants :

1. $A(2,4); (\mathcal{C} : x^2+y^2-5y=0$
2. $A(-1,3); (\mathcal{C} : x^2+y^2+4x-4y+6=0$
3. $A(-1,1); (\mathcal{C} : x^2+y^2+4x-2y+4=0$

Exercice 20
Déterminer l'équation du cercle circonsrit au triangle (ABC) où
$A(1,-1), B(6,5)$ et $C(4,2)$

Exercice 21
Déterminer l'orthocentre du triangle (ABC) où
$A(1,2), B(4,4)$ et $C(6,1)$

Exercice 22
Résoudre graphiquement le systéme suivant $\begin{cases} x^2+y^2-2y \leq 0 \\ 2x+y-1 \geq 0 \end{cases}$

Exercice 23
Résoudre graphiquement l'inéquation suivante $(x^2+y^2-2x-4y-4)(x+y-1) < 0$

Exercice 24
On considére les points $A(1, \sqrt{5}), B(-1, 1)$et$C(3, -1)$

1. Caculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$
2. Quelle est la nature de (ABC) ?
3. Déterminer la projection H de A sur (BC)
4. Calculer $d(A, BC)$

Exercice 25
On considére les points $A(-1, 2), B(-2, 1)$et$C(2, -1)$

1. Caculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$
2. Quelle est la nature de (ABC) ?
3. Déterminer l'équation de (BC)
4. Calculer $d(A, BC)$
5. Calculer $cos(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}); sin(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}})$

Exercice 26
Soit $(\mathcal{C}_m)$ l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que
$x^2 + y^2 - (m+1)x + (m+2)y + \frac{m^2}{4} + 2m + 1 = 0$

1. Montrer que $(\mathcal{C}_m)$ est un cercle dont on déterminera le centre Ω_m et le rayon
2. Déterminer l'ensemble des centres Ω_m quand m varie dans $\mathbb{R}$
3. Déterminer les cercles $(\mathcal{C}_m)$ tangent à $(D) : x + y + 1 = 0$

Exercice 27

Résoudre graphiquement le systéme suivant $\begin{cases} x^2 + y^2 - 6x - 10y + 9 \leq 0 \\ 3x - y - 4 \leq 0 \\ y \leq 5 \end{cases}$

Exercice 28
Soit $(\mathcal{C})$ le cercle d'équation $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 7 = 0$
et $(\mathcal{D}_m)$la droite d'équation$y = mx$

1. Etudier $(\mathcal{C}) \cap (\mathcal{D}_m)$
2. Déterminer l'ensemble des milieux $I_m$des segments [M',M"]
   où $(\mathcal{C}) \cap (\mathcal{D}_m) = \{M', M"\}$

Exercice 29
Soit $(\mathcal{C})$ le cercle d'équation $x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0$
et $(\mathcal{D}_m)$la droite d'équation$y = m + x$

1. Etudier $(\mathcal{C}) \cap (\mathcal{D}_m)$
2. Déterminer l'ensemble des milieux $I_m$des segments [M',M"]
   où $(\mathcal{C}) \cap (\mathcal{D}_m) = \{M', M"\}$

Exercice 30
Soit $(\mathcal{C}_m)$ l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que
$x^2 + y^2 + (m-6)x - (m+2)y + 6 = 0$

1. Montrer que $(\mathcal{C}_m)$ est un cercle dont on déterminera le centre Ω_m et le rayon R_m
2. Déterminer (D)l'ensemble des centres Ω_m quand m varie dans $\mathbb{R}$
3. Montrer que tous les cercles $(\mathcal{C}_m)$ passent par des points fixes A et B
4. Montrer que $(AB) \perp (D)$

Exercice 31
Soit $f(x) = \sqrt{8x^2 - 4x + 5}$

1. Déterminer D_f
2. Montrer que f est croissante sur $[\frac{1}{4}, +\infty[$
3. Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}) f(\frac{1}{2} - x) = f(x)$
4. En déduire que f est décroissante sur $] - \infty, \frac{1}{4}]$
5. Soit $M(\frac{1}{2} + t, 1 - t)$ avec $t \in \mathbb{R}$
   (a) Calculer la distance OM en fonction de f(t)
   (b) En déduire d(O,(D)) où (D) est la droite définie paramétriquement par $(D) : \begin{cases} x = \frac{1}{2} + t \\ y = 1 - t \end{cases} \ (t \in \mathbb{R})$