Complexe Chourouk **18/12/2019**

1SM

Khouribga **ELOUADIH**

Série6: Trigonométrie

Exercice 1
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $cos(4x) + \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$
2. $4cos^2(2x) - 3 = 0$
3. $cos(\frac{x}{3}) + sin(\frac{x}{2}) = 0$
4. $sin(5x) + sin(3x) = 0$
5. $cos(2x) + cos(3x) = 0$
6. $sin(2x) = tan(x)$

Exercice 2
Résoudre dans I les inéquations suivantes :

1. $sin(x) \leq \frac{\sqrt{3}}{2}; I = [-3\pi, \pi]$
2. $tan(x) < 1; I = [0, 2\pi]$
3. $cos(2x) > \frac{1}{2}; I = [-2\pi, \pi]$
4. $cos(2x - \frac{\pi}{3}) < \frac{\sqrt{3}}{2}; I = [-2\pi, \pi]$

Exercice 3
Résoudre dans $[0, 2\pi]$ les inéquations suivantes :

1. $sin(x) \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$
2. $cos(2x) + 2sin(x)cos(x) \geq 1$
3. $(\sqrt{2}cos(x) - 1)(2sin(x) + 1) \leq 0$
4. $4sin^2(x) - 2(1 + \sqrt{3})sin(x) + \sqrt{3} \leq 0$

Exercice 4 *Simplifier :*
$A = cos^2(\frac{\pi}{8}) + cos^2(\frac{3\pi}{8}) + cos^2(\frac{5\pi}{8}) + cos^2(\frac{7\pi}{8})$
$B = sin^2(\frac{\pi}{8}) + sin^2(\frac{3\pi}{8}) + sin^2(\frac{5\pi}{8}) + sin^2(\frac{7\pi}{8})$

Exercice 5 *Simplifier :*
$A = cos^4(\frac{\pi}{8}) + cos^4(\frac{3\pi}{8}) + cos^4(\frac{5\pi}{8}) + cos^4(\frac{7\pi}{8})$
$B = sin^4(\frac{\pi}{8}) + sin^4(\frac{3\pi}{8}) + sin^4(\frac{5\pi}{8}) + sin^4(\frac{7\pi}{8})$

Exercice 6
Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{sin(3x)}{sin(x)} - \frac{cos(3x)}{cos(x)}$

1. Déterminer D_f

2. Montrer que f est constante

Exercice 7

Soit h la fonction définie par $h(x) = cos^6(x) + sin^6(x) + 3cos^2(x)sin^2(x)$

1. Montrer que h est constante
2. Simplifier :$cos^6(\frac{\pi}{12}) + cos^6(\frac{3\pi}{12}) + cos^6(\frac{5\pi}{12}) + cos^6(\frac{7\pi}{12}) + cos^6(\frac{9\pi}{12}) + cos^6(\frac{11\pi}{12})$

Exercice 8

1. Montrer que $\forall x \neq k\pi \; cos(x)cos(2x)cos(4x) = \frac{sin(8x)}{8sin(x)}$
2. Calculer $cos(\frac{\pi}{7})cos(\frac{2\pi}{7})cos(\frac{4\pi}{7})$
3. Calculer $cos(\frac{\pi}{9})cos(\frac{2\pi}{9})cos(\frac{4\pi}{9})$

Exercice 9

1. Montrer que $sin(\frac{\pi}{24})sin(\frac{5\pi}{24})sin(\frac{7\pi}{24})sin(\frac{11\pi}{24}) = \frac{1}{16}$
2. Montrer que $sin(\frac{\pi}{9})sin(\frac{2\pi}{9})sin(\frac{3\pi}{9})sin(\frac{4\pi}{9}) = \frac{3}{16}$
3. Montrer que $cos(\frac{\pi}{9})cos(\frac{2\pi}{9})cos(\frac{3\pi}{9})cos(\frac{4\pi}{9}) = \frac{1}{16}$

Exercice 10 *Résoudre dans $\mathbb{R}$:*

1. $sin(\frac{x}{2}) - \sqrt{3}cos(\frac{x}{2}) = \sqrt{2}$
2. $cos(3x) - sin(3x) = 1$
3. $cos(2x) - \sqrt{3}sin(2x) = m$
4. $(\sqrt{2} - 1)cos(2x) + sin(2x) - 1 = 0$

Exercice 11 $f(x) = 1 + sin(x) + cos(x)$

1. Montrer que $f(x) = 2\sqrt{2}cos(\frac{x}{2})cos(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4})$
2. Résoudre dans$] - \pi, \pi], f(x) = 0$

Exercice 12

1. Résoudre dans $\mathbb{R}, sin(x)cos(x) = 0$
2. Montrer que $\forall x \neq k\frac{\pi}{2}, \frac{sin(5x)}{sin(x)} - \frac{cos(5x)}{cos(x)} = 4cos(2x)$
3. Résoudre dans$[0, \pi], \frac{sin(5x)}{sin(x)} - \frac{cos(5x)}{cos(x)} \leq 0$

Exercice 13

1. Montrer que $cos(3x) = 4cos^3(x) - 3cos(x)$
2. En déduire $cos(x) + cos(2x) + cos(3x) = cos(2x)(1 + 2cos(x))$
3. Soit (E)l'équation suivante :$cos(x)+cos(2x)+cos(3x) = -cos(2x)(1-2sin(x))$
   (a) Montrer que $(E) \Leftrightarrow cos(2x)(cos(x) - sin(x) + 1)$

(b) Résoudre dans $\mathbb{R}, (E)$

Exercice 14
$f(x) = 3 - 2sin^2(x) - \sqrt{3}sin(2x)$

1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R} f(x) = (\sqrt{3}cos(x) - sin(x))^2$
2. Résoudre dans$] - \pi, \pi], f(x) = 1$

Exercice 15

$f(x) = cos(3x) + \frac{1}{2}sin(2x) - 2cos^3(x) + 2cos(x)$

1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R} cos(3x) = cos(x)(1 - 4sin^2(x))$
2. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R} f(x) = cos(x)(1 - 2sin^2(x) + sin(x))$
3. Résoudre dans$] - \pi, \pi], f(x) = 0$

Exercice 16
Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $cos(2x) + \sqrt{2}cos(x) - 1 = 0$

Exercice 17
Résoudre dans $[0, \pi]$l'inéquation $2sin(x)tan(x) - \sqrt{2} \leq 0$

Exercice 18
$f(x) = cos(x + \frac{\pi}{6})sin(x + \frac{\pi}{3}$

1. Résoudre dans$[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], f(x) = 0$
2. Résoudre dans$[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], f(x) < 0$

Exercice 19

Soit $\alpha \in [\frac{-\pi}{2}$ telle que $cos(\alpha) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

1. Calculer $cos(2\alpha)$ et en déduire α
2. Calculer $sin(\alpha)$
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ $(2 - \sqrt{2})cos(x) + \sqrt{2}sin(x) = \sqrt{2 - \sqrt{2}}$
4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ $(2 - \sqrt{2})cos(x) + \sqrt{2}sin(x) \leq \sqrt{2 - \sqrt{2}}$

Exercice 20
$f(x) = 2cos^3(x) - 2sin^2(x)cos(x) - cos(x) + sin(x)$

1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R} f(x) = (cos(2x) + sin(2x))(cos(x) - sin(x))$
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ f(x)=0
3. Résoudre dans $[0, \pi]$l'inéquation $f(x) > 0$

Exercice 21
$f(x) = \frac{sin(2x)}{1+cos(2x)}$

1. DeterminerD_f
2. Montrer que $\forall x \in D_f f(x) = tan(x)$
3. Résoudre dans$] - \pi, \pi], f(x) \geq \frac{1}{\sqrt{3}}$

Exercice 22
$A(x) = cos(4x) - 2cos(3x) + cos(2x)$

1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R} A(x) = 2(cos(x) - 1)cos(3x)$
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $A(x) = 0$
3. Résoudre dans $[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], A(x) \leq 0$

Exercice 23

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(E) : cos(3x) = cos(2x)$
2. Ecrire une équation (E') en $y = cos(x)$ équivalente à (E)
3. calculer $cos(\frac{2\pi}{5})$ et $cos(\frac{4\pi}{5})$

Exercice 24

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(E) : cos(3x) = cos(4x)$
2. Ecrire une équation (E') en $y = cos(x)$ équivalente à (E)
3. Montrer que : $cos(\frac{\pi}{7})cos(\frac{2\pi}{7})cos(\frac{4\pi}{7}) = \frac{-1}{8}$

Exercice 25

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $cos(3x) = sin(2x)$
2. En déduire les valeurs de sin x et cos x pour x élément de $\{\frac{\pi}{10}, \frac{\pi}{5}, \frac{3\pi}{10}\}$