ELOUADIH **14/11/2020**
1SM(BIOF)
Khouribga

Série2: Ensembles et Applications

Exercice 1
Soit E un ensemble et A et B deux parties de E .Simplifier :
$A \cup A; A \cup \emptyset; A \cup E; A \cap A; A \cap E; A \cap \emptyset; A \cap \overline{A}; A \cup \overline{A}$
$[A \cup (A \cap B)] \cup B; A \cap (A \cup B); (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap B); (A \cap B) \cup (A \cup B)$

Exercice 2
On considere les ensembles suivants :
$E = \{\frac{3\pi}{5} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$ et $F = \{\frac{-2\pi}{5} + k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$

1. Montrer que $E \subset F$
2. Est ce que $F \subset E$?

Exercice 3
Montrer que $\mathcal{P}(E \cap F) = \mathcal{P}(E) \cap \mathcal{P}(F)$

Exercice 4
Déterminer les ensembles A et B sachant que :
$A \cup B = \{1, 2, ..., 12\}$
$A \cap B = \{1, 3, 5, 7\}$
$A \setminus B = \{2, 4, 6, 10\}$

Exercice 5
Montrer que :
$E \subset F \Leftrightarrow \mathcal{P}(E) \subset \mathcal{P}(F)$

Exercice 6
Montrer que :

1. $\begin{cases} A \cap B = A \cap C \\ A \cup B = A \cup C \end{cases} \Leftrightarrow B = C$
2. $\begin{cases} A \cap C \subset B \cap C \\ A \setminus C \subset B \setminus C \end{cases} \Leftrightarrow A \subset B$
3. $A \cup B = A \cap C \Leftrightarrow B \subset A \subset C$
4. $\begin{cases} A \cap B \subset A \cap C \\ A \cup B \subset A \cup C \end{cases} \Leftrightarrow B \subset C$
5. $\begin{cases} A \cup B = A \cap C \\ B \cup C = B \cap A \\ C \cup A = C \cap B \end{cases} \Rightarrow A = B = C$

Exercice 7
Montrer que $\triangle$ est associative c.a.d
$\forall(A,B,C)\in\mathcal{P}(E)^3 A\triangle(B\triangle C)=(A\triangle B)\triangle C$

Exercice 8
Résoudre dans $\mathcal{P}(E)$

1. l'équation :$A\triangle X=B$
2. l'équation :$A\cap X=B$
3. l'équation :$A\cup X=B$

Exercice 9
Soient f et g les applications définies par :

$$\text{f :}\quad \begin{array}{ll} \mathbb{N} & \longrightarrow \mathbb{N} \\ n & \longmapsto n+1 \end{array} \qquad \text{g :}\quad \begin{array}{ll} \mathbb{N} & \longrightarrow \mathbb{N} \\ n & \longmapsto \begin{cases} 0, & n=0 \\ n-1, & n\geq 1 \end{cases} \end{array}$$

1. Etudier l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité de f et g ?
2. Déterminer gof et fog
3. Que remarquiez-vous ?

Exercice 10
Soit f l'application définie par :

$$\text{f :}\quad \begin{array}{ll} [\frac{1}{4},+\infty[& \longrightarrow [\frac{7}{8},+\infty[\\ x & \longmapsto 2x^2-x+1 \end{array}$$ Montrer que f est bijective et déterminer f^{-1}

Exercice 11
Soit f l'application définie par :

$$\text{f :}\quad \begin{array}{ll} [-1,+\infty[& \longrightarrow [-4,+\infty[\\ x & \longmapsto x^2+2x-3 \end{array}$$ Montrer que f est bijective et déterminer f^{-1}

Exercice 12
Soit f l'application définie par :

$$\text{f :}\quad \begin{array}{ll} \mathbb{N} & \longrightarrow \mathbb{N} \\ n & \longmapsto n+(-1)^n \end{array}$$ Montrer que f est bijective et déterminer f^{-1}

Exercice 13
Soit E un ensemble et A une partie de E .On appelle fonction indicatrice de A l'application définie par :

$$\varphi_A :\quad \begin{array}{ll} E & \longrightarrow \{0,1\} \\ x & \longmapsto \begin{cases} 1, & x\in A \\ 0, & x\notin A \end{cases} \end{array}$$

1. Montrer que $\varphi_A=\varphi_B \Leftrightarrow A=B$
2. Montrer que $\varphi_{A\cap B}=\varphi_A\times\varphi_B$

3. Montrer que $\varphi_{A\cup B} = \varphi_A + \varphi_B - \varphi_{A\cap B}$
4. Montrer que $\varphi_{\overline{A}} = 1 - \varphi_A$

Exercice 14
Soit $f : E \to F$ une application et B_1 et B_2 deux parties de F
Montrer que :

1. $B_1 \subset B_2 \Rightarrow f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$
2. $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$
3. $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$
4. $f^{-1}(C_F^B) = C_E^{f^{-1}(B)}$

Exercice 15
Soit $f : E \to F$ une application et A_1 et A_2 deux parties de E
Montrer que :

1. $A_1 \subset A_2 \Rightarrow f(A_1) \subset f(A_2)$
2. $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap (A_2)$
3. $f(^{}A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$

Exercice 16
Soit $f : E \to F$ une application
Montrer que :$finjective \Leftrightarrow \forall (A,B) \in (\mathcal{P}(E))^2 f(A\cap B) = f(A) \cap f(B)$

Exercice 17
Soit $f : E \to F$ une application
Montrer que :$finjective \Leftrightarrow \forall A \in \mathcal{P}(E) f^{-1}(f(A)) = A$

Exercice 18
Soit $f : E \to F$ une application
Montrer que :$fsurjective \Leftrightarrow \forall B \in \mathcal{P}(F) f(f^{-1}(B)) = B$

Exercice 19
Soit $f : E \to F$ une application
Montrer que :$fbijective \Leftrightarrow \forall A \in \mathcal{P}(E) f(C_E^A) = C_F^{f(A)}$

Exercice 20
Soit E un ensemble et A et B deux parties de E l'application définie par

$$\text{f :} \quad \begin{array}{ll} \mathcal{P}(E) & \longrightarrow \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \\ X & \longmapsto (X \cap A, X \cap B) \end{array}$$

1. Montrer que :$finjective \Leftrightarrow A \cup B = E$
2. Montrer que :$fsurjective \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$
3. Déterminer f^{-1} quand elle est bijective

Exercice 21
Soit f l'application définie par :

$$\text{f :} \quad \begin{array}{ll} \mathbb{Z} \times [0,1[& \longrightarrow \mathbb{R} \\ (n,x) & \longmapsto n+x \end{array}$$ Montrer que f est bijective et déterminer f^{-1}

Exercice 22
Etudier l'injectivité ;la surjectivité et la bijectivité des applications suivantes :

1. f : $\begin{array}{ll} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \frac{x}{1+|x}| \end{array}$

2. g : $\begin{array}{ll} \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto x+y \end{array}$

3. h : $\begin{array}{ll} \mathbb{N} & \longrightarrow \mathbb{N} \\ x & \longmapsto 3x \end{array}$

4. k : $\begin{array}{ll} \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto x\times y \end{array}$

5. f : $\begin{array}{ll} \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R}\times\mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto (x+y,x-y) \end{array}$

6. k : $\begin{array}{ll} \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto 2x+3y \end{array}$

Exercice 23
Soit E un ensemble et A une partie de E On considére les applications suivantes :

φ : $\begin{array}{ll} \mathcal{P}(E) & \longrightarrow \mathcal{P}(E) \\ X & \longmapsto X\cap A \end{array}$

ψ : $\begin{array}{ll} \mathcal{P}(E) & \longrightarrow \mathcal{P}(E) \\ X & \longmapsto X\cup A \end{array}$

1. Montrer que :$\psi injective \Leftrightarrow A=\emptyset$
2. Montrer que :$\varphi injective \Leftrightarrow A=E$

Exercice 24
Soient $f:E\rightarrow F$ et $g:E\rightarrow G$ deux applications

et h : $\begin{array}{ll} E & \longrightarrow F\times G \\ x & \longmapsto (f(x),g(x)) \end{array}$

1. Montrer que si f ou g est injective alors h est injective
2. Si f et g sont surjectives ,h est-t-elle surjective ?

Exercice 25
Soit $f:E\rightarrow F$ et Soit $g:F\rightarrow G$ deux applications

1. Montrer que si gof est injective alors f est injective
2. Montrer que si gof est surjective alors g est surjective

3. Montrer que $\left\{\begin{array}{l} gofestinjective \\ festsurjective \end{array}\right. \Rightarrow gestinjective$

4. Montrer que $\left\{\begin{array}{l} gofestsurjective \\ gestinjective \end{array}\right. \Rightarrow festsurjective$

Exercice 26
Soient $f : E \to F$ et $g : E \to G$ $h : G \to H$ trois applications
Montrer que si gof et hog sont bijectives alors f,g et h sont bijectives

Exercice 27
Soient E un ensemble, $f : E \to E$une application telle que $fofof = f$. Montrer que : $finjective \Leftrightarrow fsurjective \Leftrightarrow fbijective.$

Exercice 28
Soient E et F deux ensembles
A une partie de E et B une partie de F
Soient $f : A \to B$ et $g : \overline{A} \to \overline{B}$

h : $\begin{array}{lll} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & \left\{\begin{array}{ll} f(x), & x \in A \\ g(x), & x \in \overline{A} \end{array}\right. \end{array}$

1. Montrer que h injective $\Leftrightarrow$ f et g injectives
2. Montrer que h surjective $\Leftrightarrow$ f et g surjectives
3. Montrer que h : $\begin{array}{lll} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \left\{\begin{array}{ll} \sqrt{x}, & x \geq 0 \\ -\sqrt{-x}, & x < 0 \end{array}\right. \end{array}$ est bijective et déteminer sa bijection réciproque

Exercice 29

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$
2. f : $\begin{array}{lll} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^4 - 3x^2 - 10 \end{array}$
   (a) Déterminer $f^{-1}(\{-6\})$ Que peut on déduire ?
   (b) Déterminer $f(\mathbb{R})$ Que peut on déduire ?